

C. SOUILLART
ÉMILE MATHIEU

Solution de la question 405

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 17
(1858), p. 192-194

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__192_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1858, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 405

(voir t. XVI, p. 401);

PAR M. C. SOUILLART,
Ancien élève de l'École Normale,
ET M. ÉMILE MATHIEU,
Professeur.

Étant donnée l'équation

$$(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)(x'^3 + y'^3 + z'^3 - 3x'y'z') \\ = X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ,$$

trouver les valeurs de X, Y, Z en fonction de x, y, z, x', y', z'.

Le polynôme $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ peut être mis sous la forme d'un déterminant.

On a

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = - \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

de même

$$x'^3 + y'^3 + z'^3 - 3x'y'z' = - \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ y' & z' & x' \\ z' & x' & y' \end{vmatrix}$$

On aura donc

$$(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)(x'^3 + y'^3 + z'^3 - 3x'y'z') \\ = \begin{vmatrix} xx' + yy' + zz' & xy' + yz' + zx' & xz' + yx' + zy' \\ yx' + zy' + xz' & yy' + zz' + xx' & yz' + zx' + xy' \\ zx' + xy' + yz' & zy' + xz' + yx' & zz' + xx' + yy' \end{vmatrix}$$

(193)

Si l'on pose

$$\begin{aligned} X &= xx' + yy' + zz', \\ Y &= xy' + yz' + zx', \\ Z &= xz' + yx' + zy' (*), \end{aligned}$$

le déterminant-produit devient

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \\ Y & Z & X \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & X \\ Z & X & Y \end{vmatrix} = X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ.$$

Les valeurs précédentes de X, Y, Z répondent donc à la question.

La formule

$$\begin{aligned} (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)(x'^3 + y'^3 + z'^3 - 3x'y'z') \\ = X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ, \end{aligned}$$

dans laquelle

$$\begin{aligned} X &= xx' + yy' + zz', \\ Y &= xy' + yz' + zx', \\ Z &= xz' + yx' + zy', \end{aligned}$$

est un cas particulier de la formule

$$\begin{vmatrix} x & y & z & u & v \dots & r & s & t \\ y & z & u & v \dots & & s & t & x \\ z & u & v \dots & & & t & x & y \\ \dots & \dots \\ t & x & y & z \dots & & r & s & \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x' & y' & z' & u' \dots & & r' & s' & t' \\ y' & z' & u' \dots & & & s' & t' & x' \\ z' & u' & v' \dots & & & t' & x' & y' \\ \dots & \dots \\ t' & x' & y' & z' \dots & & r' & s' & \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} X & Y & Z & U \dots & R & S & T \\ Y & Z & U & V \dots & S & T & X \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T & X & Y & Z \dots & R & S & \end{vmatrix}$$

(*) Ce résultat est énoncé dans l'Algèbre de M. Bertrand, 2^e édition.
Ann. de Mathématiques, t. XVII. (Mai 1858.)

dans laquelle on pose

$$X = xt' + ys' + zr' + \dots + sy' + tx',$$

$$Y = xx' + yt' + zs' + \dots + sz' + ty',$$

$$Z = xy' + yx' + zt' + \dots + sx' + tr',$$

.....

Par exemple, si les déterminants sont du quatrième ordre, on a

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{l} -x^4 + y^4 - z^4 + u^4 - 4y^2xz - 4xu^2z \\ + 4x^2yu + 4yuz^2 + 2x^2z^2 - 2u^2y^2 \end{array} \right) \\ & \times \left(\begin{array}{l} -x'^4 + y'^4 - z'^4 + u'^4 - 4y'^2x'z' - 4x'u'^2z' \\ + 4x'^2y'u' + 4y'u'z'^2 + 2x'^2z'^2 - 2u'^2y'^2 \end{array} \right) \\ & = -X^4 + Y^4 - Z^4 + U^4 - 4Y^2XZ - 4XU^2Z \\ & \quad + 4X^2YU + 4YUZ^2 + 2X^2Z - 2U^2Y^2, \end{aligned}$$

en posant

$$X = xu' + yz' + zy' + ux',$$

$$Y = xx' + yu' + zz' + uy',$$

$$Z = xy' + yx' + zu' + u'z',$$

$$U = xz' + yy' + zx' + uu'.$$