NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉMIL MATHIEU

FAURE

GROLOUS

TARDY

Solutions des questions 410 et 411 (Prouhet)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 187-190

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__187_1>

SOLUTIONS DES QUESTIONS 410 ET 411 (PROUHET)

(voir t. XVI, p. 403);

PAR MM. EMILE MATHIEU, LE CAPITAINE FAURE, GROLOUS ET TARDY (GÊNES).

Si l'on désigne par D le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \cos n\alpha_0 & \cos(n-1)\alpha_0 & \cos(n-2)\alpha_0 \ldots & \cos 0\alpha_0 \\ \cos n\alpha_1 & \cos(n-1)\alpha_1 & \cos(n-2)\alpha_1 \ldots & \cos 0\alpha_1 \\ \cos n\alpha_2 & \cos(n-1)\alpha_2 & \cos(n-2)\alpha_2 \ldots & \cos 0\alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos n\alpha_n & \cos(n-1)\alpha_n & \cos(n-2_n)\alpha_n \ldots & \cos 0\alpha_n \end{vmatrix}$$

et par D_1 le déterminant

$$\begin{vmatrix} \cos^n \alpha_0 & \cos^{n-1} \alpha_0 & \cos^{n-2} \alpha_0 \ldots & \cos^0 \alpha_0 \\ \cos^n \alpha_1 & \cos^{n-1} \alpha_1 & \cos^{n-2} \alpha_1 \ldots & \cos^0 \alpha_1 \\ \cos^n \alpha_2 & \cos^{n-1} \alpha_2 & \cos^{n-2} \alpha_2 \ldots & \cos^0 \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos^n \alpha_n & \cos^{n-1} \alpha_n & \cos^{n-2} \alpha_n \ldots & \cos^0 \alpha_n \end{vmatrix}$$

on aura

$$D = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} D_1.$$

En second lieu, si l'on désigne par D_2 le déterminant

$$\begin{vmatrix} \sin(n+1)\alpha_0 & \sin n\alpha_0 \ldots & \sin \alpha_0 \\ \sin(n+1)\alpha_1 & \sin n\alpha_1 \ldots & \sin \alpha_1 \\ \sin(n+1)\alpha_2 & \sin n\alpha_2 \ldots & \sin \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sin(n+1)\alpha_n & \sin n\alpha_n \ldots & \sin \alpha_n \end{vmatrix}$$

on aura

$$D_2 = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \sin\alpha_0 \sin\alpha_1 \ldots \sin\alpha_n D_1$$

Commençons par rappeler la formule

$$(m) \left\{ \begin{aligned} 2^{n-1} \cos^n \alpha_0 = \cos n\alpha_0 &+ n\cos(n-2)\alpha_0 \\ &+ \frac{n(n-1)}{1.2} \cos(n-4)\alpha_0 + \ldots \end{aligned} \right.$$

Ensuite aux éléments de la première colonne du déterminant D, ajoutons les éléments des colonnes de rang impair multipliés respectivement par les coefficients du second membre de l'équation (m); puis agissons d'une manière analogue pour les autres colonnes : il est clair que le déterminant D pourra s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{vmatrix} 2^{n-1}\cos^n\alpha_0 & 2^{n-2}\cos^{n-1}\alpha_0 & 2^{n-3}\cos^{n-2}\alpha_0\ldots & \cos^0\alpha_0 \\ 2^{n-1}\cos^n\alpha_1 & 2^{n-2}\cos^{n-1}\alpha_1 & 2^{n-3}\cos^{n-2}\alpha_1\ldots & \cos^0\alpha_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2^{n-1}\cos^n\alpha_n & 2^{n-2}\cos^{n-1}\alpha_n & 2^{n-3}\cos^{n-2}\alpha_n\ldots & \cos^0\alpha_n \end{vmatrix}$$

Par conséquent nous aurons

$$D = 2^{(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1} D_1.$$

ou

$$D = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} D_1.$$

Pour démontrer la formule de la deuxième question, nous rappellerons la formule suivante :

$$\sin(n+1)\alpha_0 = (n+1)\cos^n\alpha_0 \sin\alpha_0 - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\cos^{n-2}\alpha_0\sin^3\alpha_0 + \ldots,$$

qui se déduit immédiatement de celle de Moivre. Si nous remplaçons $\sin^2\alpha$, $\sin^4\alpha$, etc., par $1-\cos^2\alpha$, $1-\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$, etc., cette formule pourra s'écrire

$$\sin(n+1)\alpha_0 = \sin\alpha_0 \left\{ \begin{array}{l} \cos^n\alpha_0 \left[\begin{array}{l} n+1+\dfrac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} \\ +\dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5}+\ldots \end{array} \right] \\ + A\cos^{n-2}\alpha_0 + B\cos^{n-4}\alpha_0 + \ldots \end{array} \right\}$$

ou

$$\sin(n+1)\alpha_0 = \sin\alpha_0(2^n\cos^n\alpha_0 + A\cos^{n-2}\alpha_0 + B\cos^{n-4}\alpha_0 + \ldots).$$

Remplaçons dans le déterminant D_2 les sinus qui y entrent en fonction de $\cos\alpha_0$, et faisons sortir en dehors du déterminant les facteurs $\sin\alpha_0$, $\sin\alpha_1$ etc., communs respectivement aux éléments de la première ligne, de la deuxième, etc., D_2 deviendra

$$\sin\alpha_0 \sin\alpha_1 \quad \sin\alpha_n$$

$$\times \begin{vmatrix} 2^n\cos^n\alpha_0 + A\cos^{n-2}\alpha_0 + B\cos^{n-4} + & 2^{n-1}\cos^{n-1}\alpha_0 + A'\cos^{n-2}\alpha_0 + & \cos^0\alpha_0 \\ 2^n\cos^n\alpha_1 + A\cos^{n-2}\alpha_1 + B\cos^{n-4} + & 2^{n-1}\cos^{n-1}\alpha_1 + A'\cos^{n-2}\alpha_1 + & \cos^0\alpha_1 \\ \cdot \quad\quad \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ 2^n\cos^n\alpha_n + A\cos^{n-2}\alpha_n + B\cos^{n-4} + & 2^{n-1}\cos^{n-1}\alpha_n + A'\cos^{n-2}\alpha_n + & \cos^0\alpha_n \end{vmatrix}$$

Or, d'après un principe duquel nous nous sommes déjà servis, nous pourrons supprimer les derniers termes de ces éléments, puis les avant-derniers, et ainsi de suite, de manière que chaque élément ne contienne plus que son premier terme.

Faisons ensuite sortir les puissances de 2 en dehors du déterminant, nous aurons enfin

$$D_2 = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \sin\alpha_0 \sin\alpha_1 \quad \sin\alpha_n\, D_1$$