VANNSON

Formules fondamentales de l'analyse sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 163-172

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__163_1>

FORMULES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE SPHÉRIQUE

(voir p 140),

PAR M. VANNSON.

Transformation des coordonnées.

1°. Prendre pour nouvelle origine un point donné sur l'axe des x en laissant les axes rectangulaires.

Soient a l'abscisse de la nouvelle origine et

$$\varphi(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe donnée ; si nous y introduisons les coordonnées géographiques sans changer l'origine, l'équation devient

$$\varphi\left(x, \frac{y}{\cos x_1}\right) = 0,$$

x_1 étant l'abscisse dont x était la tangente. Remplaçons maintenant x_1 par $x_1 + a$, l'équation deviendra

$$\varphi\left[\operatorname{tang}(x_1 + a), \frac{y}{\cos(x_1 + a)}\right] = 0.$$

Pour revenir maintenant aux coordonnées géométriques après le changement d'origine, il suffit de multiplier y par $\cos x_1$; l'équation demandée sera donc

$$\varphi\left[\operatorname{tang}(x_1 + a), \frac{y \cos x_1}{\cos(x_1 + a)}\right] = 0.$$

Si nous développons tang $(x_1 + a)$ et cos $(x_1 + a)$, nous aurons, en posant

$$\alpha = \operatorname{tang} a \quad \text{et} \quad X = \operatorname{tang} x,$$

l'équation plus simple

$$\varphi\left[\frac{X + \alpha}{1 - \alpha X}, \frac{y}{\cos a (1 - \alpha X)}\right] = 0.$$

Nous allons appliquer cette méthode à la recherche du centre dans les courbes du deuxième degré dont l'équation générale est

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Remarquons d'abord que si l'on trouve sur la surface de la sphère un point O tel, que deux arcs menés de ce point et terminés de part et d'autre à la rencontre de la courbe soient divisés au point O en deux parties égales, tout autre arc mené par le point O sera divisé de la même manière, donc le point O sera le centre de la courbe.

En effet, prenons ces deux arcs pour axes et O pour origine; en faisant $y = 0$, on devra trouver deux racines égales et de signe contraire, d'où

$$E = 0;$$

on aura de même

$$D = 0:$$

d'où l'on voit aisément que tout autre arc mené du point O et inscrit à la courbe aura son milieu au point O; O est donc le centre. Soient a et b les coordonnées de ce point O rapporté aux axes primitifs, α et β les tangentes des arcs a et b; portons l'origine au point de l'axe des x qui a pour abscisse a, l'équation transformée sera

$$\frac{Ay^2}{\cos^2 a} + \frac{By(\alpha + X)}{\cos a} + C(\alpha + X)^2 + \frac{Dy(1 - \alpha X)}{\cos a}$$
$$+ E(\alpha + X)(1 - \alpha X) + F(1 - \alpha X)^2 = 0.$$

Concevons maintenant qu'on ait mené par le point cherché un arc perpendiculaire à l'axe nouveau des y, l'équation de cet arc sera

$$y = \beta \cos \alpha$$

(y et β sont des tangentes); on aura alors une équation du deuxième degré en X; donc les racines seront égales et de signe contraire, ce qui donne la condition

$$(1) \qquad Bb + 2C\alpha + E = \alpha(D\beta + E\alpha + 2F);$$

on trouve de même

$$(2) \qquad B\alpha + 2Ab + D = \beta(D\beta + E\alpha + 2F).$$

Ces équations sont celles qu'on trouve dans la recherche des plans principaux des surfaces du second degré. Pour nous rendre compte de cette similitude, cherchons l'équation de la surface particulière pour laquelle la recherche des plans principaux conduirait identiquement aux équations (1) et (2). On trouve aisément

$$Ay^2 + Cx^2 + Bxy + Dyz + Exz + Fz^2 = 0.$$

C'est un cône ayant son sommet à l'origine.

Si l'on cherche l'intersection de cette surface avec la sphère en employant les coordonnées sphériques, on trouve la courbe proposée.

Il reste à faire voir que la ligne de l'espace ayant pour coefficients de direction α, β, est perpendiculaire à un des plans principaux. En effet, si nous joignons le centre de notre conique sphérique au centre de la sphère par une droite, cette droite aura pour équations

$$x = \alpha z, \quad y = \beta z,$$

et comme elle est l'intersection de deux plans principaux du cône, elle est bien perpendiculaire au troisième, ce qu'on voulait faire voir.

Il suit de là que l'élimination de α dans les équations (1) et (2) conduira à une équation du troisième degré ayant ses trois racines réelles. Notre courbe a donc trois centres, et, d'après ce qu'on vient de voir, ils sont placés aux trois sommets d'un triangle trirectangle. On voit aussi que si l'on construit ce triangle, chacun de ses côtés partagera la courbe en parties symétriques et sera, par conséquent, un axe de cette courbe.

Remarque. Si, au lieu de transporter l'origine en un point de l'axe des x, on la transportait à la distance β sur l'axe des y, on aurait

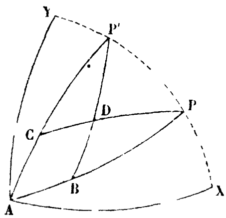
$$x = x' \frac{\cos y'}{\cos(y' + \beta)}.$$

Second cas. Pour changer d'axes sans déplacer l'origine, on peut employer la considération des projections centrales. On peut aussi, comme nous allons le faire voir, se servir d'un procédé identique à celui qu'on emploie sur un plan.

Définition. Nous appellerons rhombe sphérique un quadrilatère ABCD dans lequel les côtés opposés AB, CD et les deux autres AC et BD se coupent à 90 degrés du sommet A en P et P′.

THÉORÈME. *Si par le sommet* A *d'un rhombe sphérique* (*) *on mène un arc de grand cercle, la tangente de la projection de la diagonale* AD *sur cet arc égale la somme des tangentes des projections des deux côtés* AB *et* AC.

FIG. 1.



Soient x', y' les tangentes des coordonnées de B et x'', y'' les tangentes des coordonnées de C. L'arc PBC aura pour équation

$$y - y'' = \frac{y'}{x'}(x - x''),$$

et l'arc P′DB aura pour équation

$$y - y' = \frac{y''}{x''}(x - x'').$$

(*) Le terme *parallélogramme*, que nous évitons à dessein, a déjà été employé pour désigner un quadrilatère dont les diagonales se coupent en parties égales.

On tire de là pour le point D

$$X = x' + x''.$$

C. Q. F. D.

Si l'on menait par le point A un autre arc AE et qu'on construisît un nouveau rhombe avec AD diagonale du premier et AE comme côtés, la tangente de la projection de la nouvelle diagonale égalerait la somme des tangentes des projections des arcs AB, AC, AE, et ainsi de suite pour un nombre quelconque d'arcs.

Cela posé, soient OX et OY deux axes faisant entre eux l'angle θ, soient α l'angle du nouvel axe des x avec l'ancien et α' l'angle du nouvel axe des y avec OX ; si nous traçons les arcs projetants d'un point m dans les deux systèmes, *om* sera la diagonale commune à deux rhombes. Si donc nous la projetons sur un arc perpendiculaire à l'axe OY, nous aurons, par le théorème précédent,

$$\text{tang proj. A}\,m = x \sin\theta,$$

et cette même tangente égale

$$x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \alpha'),$$

d'où

$$x = \frac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \alpha')}{\sin\theta}.$$

On trouve de même

$$y = \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\alpha'}{\sin\theta}.$$

Les formules relatives aux divers cas particuliers se déduisent de là comme sur un plan.

Simplification de l'équation générale des courbes sphériques du second degré.

Nous avons indiqué plus haut le moyen de trouver les coordonnées du centre (C); pour y transporter l'origine, on commencera par faire tourner l'axe des x jusqu'à ce qu'il passe au centre en laissant les axes rectangulaires; l'angle α aura pour tangente $\frac{y'}{x'}$, y' et x' désignant les tangentes des coordonnées du centre; puis on transportera l'origine sur le nouvel axe des x au point C, la distance a des deux origines étant donnée par la formule

$$\operatorname{tang} a = \sqrt{y_1^2 + x_1^2}.$$

Quand on applique au cas du cercle, la première transformation doit faire disparaître la première puissance de y et le rectangle des variables par raison de symétrie, la seconde fait disparaître x, et on trouve pour équation transformée

$$y^2 + x^2 = \frac{B^2(D^2 + E^2) + 2EDBF}{DE(DE - 2BF)}.$$

Ce second membre représente évidemment le carré de la tangente de la distance polaire du cercle donné. On peut en déduire

$$\cos^2 r = \frac{DE(DE - 2BF)}{D^2E^2 + B^2D^2 + B^2E^2}.$$

(Borgnet.)

Si l'on pose

$$\operatorname{tang}^2 r = \rho^2,$$

l'équation prendra la forme

$$y^2 + x^2 = \rho^2.$$

Pour une courbe quelconque du deuxième degré, après avoir porté l'origine au centre, on pourra faire disparaître le rectangle des variables et calculer les nouveaux coefficients par les mêmes formules que dans les courbes planes; l'équation de la courbe sera alors

$$Ay^2 + Cx^2 = F;$$

si nous supposons A et C positifs, F devra l'être, et l'on pose

$$\frac{F}{C}=a^2,\quad \frac{F}{A}=b^2,$$

on la mettra sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Si A et C sont de signes contraires, on la mettra d
même sous la forme

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\pm 1.$$

(BORGNET.)

Mais, dans ce second cas, on peut ramener l'équatio
à la première forme en transportant l'origine sur l'ax
des x à 90 degrés de l'origine actuelle, si on a -1 dan
le deuxième membre, et en opérant de même pour l'ax
des y s'il y a $+1$. Pour cela, appelant x' et y' les coor
données anciennes, et X', Y' les nouvelles, on posera
comme on l'a vu plus haut,

$$x'=X'+\frac{\pi}{2}$$

et

$$\text{tang}\, y'=\frac{\text{tang}\, Y' \cos x'}{\cos\left(x_1+\frac{\pi}{2}\right)},$$

ce qui conduira à l'équation

$$\frac{\text{tang}^2 Y'}{b_1^2}+\frac{X^2}{a_1^2}=1,$$

en posant

$$b_1^2=\frac{b^2}{a^2}$$

et

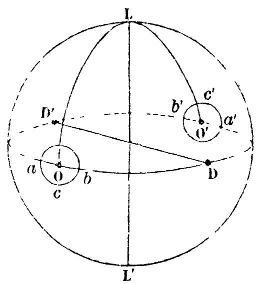
$$\frac{1}{a^2} = a_1^2,$$

ou, plus simplement,

$$\frac{Y^2}{b_1^2} + \frac{X^2}{a_1^2} = 1, \tag{1}$$

en représentant tang Y′ par Y. On voit donc qu'il n'y a en réalité qu'une seule courbe sphérique représentée par

Fig. 2.



l'équation générale du deuxième degré : on la nomme *ellipse sphérique*. Comme on peut ajouter π à un arc sans changer sa tangente, il s'ensuit que l'équation (1) représente deux courbes égales abc, $a'b'c'$; si l'origine est au point O ou O′, on a l'équation (1); si elle est au point D à égale distance de O et de O′ sur l'axe des X, on a l'équation

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = -1,$$

et D, D′ seront deux nouveaux centres; enfin, si l'on porte l'origine sur l'axe des y au point L ou L′ à égale distance de O et de O′, l'équation prendra la forme

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

et les points L, L′ seront deux nouveaux centres. Nous trouvons donc six centres ; si le calcul n'a donné que trois solutions, c'est parce que deux points diamétralement opposés ont les mêmes coordonnées. On reconnaît aussi que ces trois points sont placés aux sommets d'un triangle trirectangle. (BORGNET.)