Solution de la question 371

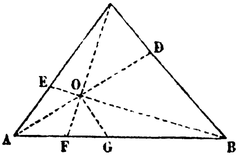
Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 152-155

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__152_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 371

(voir t. XVI).

Déterminer sur le plan d'un triangle ABC (*et dans l'intérieur du triangle*) *un point* O *tel, qu'en multipliant chaque distance de ce point à un sommet par le sinus de l'angle formé par les deux distances aux deux autres sommets, la somme des trois produits soit un maximum. Démontrer que le centre du cercle inscrit remplit cette condition.*



La fonction dont il faut déterminer le maximum est

$$\mathrm{AO}.\sin\mathrm{BOC} + \mathrm{BO}.\sin\mathrm{AOC} + \mathrm{CO}.\sin\mathrm{AOB}.$$

Pour déterminer ce maximum, il suffira d'établir le lemme suivant :

Si par l'un des sommets d'un triangle AOB *on mène une droite* OF *qui divise en deux parties quelconques l'angle* AOB *formé par les deux côtés* OA, OB, *et qu'on multiplie respectivement chacun de ces côtés par le sinus de l'angle que l'autre côté forme avec la ligne de division* OF, *le maximum de la somme*

$$AO.\sin BOF + BO.\sin AOF$$

de ces deux produits sera le troisième côté AB *du triangle.*

Pour démontrer cette proposition, je mène une droite OG qui fasse avec OA l'angle $AOG = BOF$, il en résultera $BOG = AOF$.

Les triangles AOG, BOG donnent

$$AO.\sin AOG = AG.\sin OGA$$

et

$$BO.\sin BOG = BG.\sin OGB = BG.\sin OGA.$$

Ajoutant membre à membre ces deux égalités, il vient

$$AO.\sin AOG + BO.\sin BOG = AB.\sin OGA,$$

d'où

$$AO.\sin BOF + BO.\sin AOF = AB.\sin OGA.$$

Cette dernière relation montre que la somme

$$AO.\sin BOF + BO.\sin AOF$$

est en général moindre que AB. Pour qu'elle devienne égale à AB, il faut que l'angle OGA soit droit, et dans ce cas les angles BOF, AOF sont les compléments des angles OAB, OBA adjacents au troisième côté AB du triangle.

Il est maintenant facile de trouver le maximum de la fonction

$$AO.\sin BOC + BO.\sin AOC + CO.\sin AOB.$$

En effet, désignons par OF, OE, OD les prolongements des droites CO, BO, AO, on aura

$$\sin BOC = \sin BOF, \quad \sin AOC = \sin AOF,$$

d'où

$$AO . \sin BOC + BO . \sin AOC = AO . \sin BOF + BO . \sin AOF.$$

Mais on vient de voir que $AO \sin BOF + BO \sin AOF$ ne peut jamais surpasser AB; donc on aura en général

$$(1) \qquad AO . \sin BOC + BO . \sin AOC < AB;$$

et de même

$$(2) \qquad BO . \sin AOC + CO . \sin AOB < BC,$$

$$(3) \qquad CO . \sin AOB + AO . \sin BOC < AC.$$

Additionnant et divisant par 2, il vient

$$AO . \sin BOC + BO . \sin AOC + CO . \sin AOB < \frac{AB + BC + AC}{2}.$$

Ainsi, la somme des trois produits dont il s'agit est généralement plus petite que le demi-périmètre du triangle ABC; pour qu'elle soit égale à ce demi-périmètre, il faut que les premiers membres des inégalités (1), (2), (3) deviennent égaux aux seconds membres AB, BC, AC.

Or, pour qu'on ait

$$AO . \sin BOC + BO . \sin AOC = AB,$$

il faut, comme on l'a vu précédemment, que l'angle AOF soit le complément de OBA. De même, l'égalité

$$BO . \sin AOC + CO . \sin AOB = BC$$

exige que l'angle COD soit le complément de OBC. Mais les angles AOF, COD sont égaux comme opposés au sommet: donc leurs compléments OBA, OBC seront aussi égaux entre eux, c'est-à-dire que la ligne BO sera la bissectrice de l'angle ABC.

On prouvera de même que CO doit être la bissectrice de l'angle BCA si l'on suppose à la fois

$$BO.\sin AOC + CO.\sin AOB = BC$$

et

$$CO.\sin AOB + AO.\sin BOC = AC.$$

D'où l'on peut conclure que le maximum de la somme

$$AO.\sin BOC + BO \sin AOC + CO.\sin AOB$$

s'obtient en faisant coïncider le point O avec le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, et que la valeur de ce maximum est le demi-périmètre du triangle. G.

Note. Dans le t. VII, n° 10, du ***Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg***, M. Peters (*) établit par le calcul des probabilités que la station de la planchette est déterminée avec la plus grande sécurité lorsqu'elle est placée dans le centre du cercle inscrit dans le triangle formé par les trois objets pris pour auxiliaires dans le problème dit de Pothenot; cela donne lieu au problème que M. Gerono vient de résoudre d'une manière très-simple. M. le professeur Richelot en a donné une solution *euristique* et fondée sur le calcul différentiel (*Astr. Nachr.*, n° 998, t. XLII, p. 217, 1855). Tm.

(*) Le celèbre directeur de l'observatoire d'Altona.