Nouvelles annales de mathématiques

Vannson

Formules fondamentales de l'analyse sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 140-152

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__140_1>

FORMULES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE SPHÉRIQUE

(voir page 99),

Par M. VANNSON.

Nous avons démontré que l'équation d'une circonférence de grand cercle sur la sphère est

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1 \quad \text{ou} \quad y = \mathrm{A}x + b$$

et que celle d'un petit cercle ayant son pôle à l'origine est

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta = \mathrm{R}^2,$$

les lettres x, y, a, etc., représentant des tangentes. Ces équations étant les mêmes que celles de la ligne droite et du cercle sur le plan, il en résulte qu'on a immédiatement la solution de tout problème dans lequel n'entre qu'un seul petit cercle et un nombre quelconque de grands cercles. Si le problème analogue a été résolu sur le plan par l'analyse, il suffit de prendre le résultat du calcul et de l'appliquer à la sphère en considérant certaines lettres comme des tangentes d'arcs; les applications qu'on peut faire de cette méthode sont en très-grand nombre, nous nous bornerons à quelques exemples.

1°. *Trouver l'intersection d'un petit cercle et d'un grand cercle.*

Il serait inutile de faire ici le calcul; on trouve, pour condition de possibilité,

$$R^2 > \frac{b^2 \sin^2\theta}{1 + A^2 + 2A\cos\theta}.$$

Le grand cercle ayant pour équation

$$y = Ax + b,$$

pour que les deux courbes soient tangentes, il faut qu'on ait

$$R = \pm \frac{b \sin\theta}{\sqrt{1 + A^2 + 2A\cos\theta}},$$

et comme alors le rayon égale la distance du pôle du petit cercle à l'arc tangent, il en résulte que cette formule fait connaître par sa tangente la distance de l'origine à une circonférence de grand cercle; si les axes sont rectangles, la condition de contact sera

$$b = \pm R\sqrt{1 + A^2};$$

en sorte que l'équation d'une circonférence de grand cercle tangente à un petit peut s'écrire ainsi

$$y = Ax \pm R\sqrt{1 + A^2}.$$

Cette formule résout le problème de mener une tangente à un cercle de manière que les tangentes des segments interceptés sur les côtés d'un angle droit ayant son sommet au pôle soient dans un rapport donné $(= A)$. Il y a deux solutions : si l'on cherche la rencontre des deux circonférences,

$$y = Ax \pm R\sqrt{1 + A^2}.$$

On voit qu'il ne peut y avoir pour x et y de valeurs finies communes aux deux équations; il faut donc que $x = \infty$, c'est-à-dire que la rencontre a lieu à 90 degrés du pôle. Pour achever de trouver le point de rencontre, il faut avoir sa latitude.

Soit Y la tangente de cette latitude, on aura

$$y = \frac{Y}{\cos x}.$$

Les équations des deux arcs tangents peuvent donc s'écrire ainsi

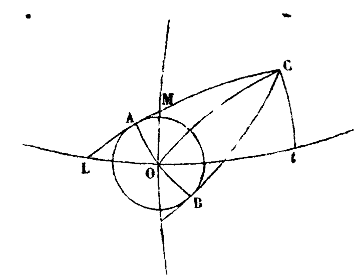
$$Y = A \sin x + R\sqrt{1 + A^2}\cos x,$$
$$Y = A \sin x - R\sqrt{1 + A^2}\cos x,$$

d'où

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad Y = A.$$

En effet, la distance CO étant un quadrant, l'angle

FIG 1.



$COA = \frac{\pi}{2}$, la latitude $Ct =$ l'angle $COt = \frac{\pi}{2} - AOL$, et on a évidemment

$$\cot AOL = \frac{\text{tang}\,MO}{\text{tang}\,LO} = -\frac{\text{tang}\,b}{\text{tang}\,a} = A.$$

Si l'on appelle x' et y' les tangentes des coordonnées du point de contact, on trouvera, au moyen des résultats précédents, que la tangente peut encore se représenter par l'équation

$$yy' + xx' = R^2.$$

On pourra se proposer de mener une tangente au cercle par un point extérieur, trouver l'équation de la corde de contact ou plus généralement la polaire d'un point $x''y''$, ce sera

$$yy'' + xx'' = r^2.$$

De là on conclura aisément les propriétés des polaires, les mêmes que sur un plan.

Problème. *Connaissant les coordonnées géographiques de deux points, trouver leur distance* Δ.

Soient xy, $x'y'$ les longitudes et latitudes des deux points donnés; A sera le troisième côté d'un triangle dans lequel on connaît deux côtés et l'angle compris, ce qui donne

$$\cos\Delta = \sin y \sin y' + \cos y \cos y' \cos(x - x').$$

Si l'on introduit les tangentes et qu'on développe $\cos(x - x')$, on a

$$\cos\Delta = \frac{\text{tang}\,y\,\text{tang}\,y' + \cos x \cos x' + \sin x \sin x'}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 y}\,\sqrt{1 + \text{tang}^2 y'}},$$

si l'on remplace la latitude y par l'ordonnée géométrique, il faudra à $\text{tang}^2 y$ substituer $Y^2 \cos^2 x$ (Y étant la tangente de l'ordonnée géométrique) ou $\frac{Y^2}{1+X^2}$ (X étant la tangente de l'abscisse ou longitude). On trouve ainsi

$$\cos\Delta = \frac{YY' + XX' + 1}{\sqrt{1 + X^2 + Y^2}\,\sqrt{1 + X_1^2 + Y_1^2}},$$

de là on tire

$$\operatorname{tang}^2\Delta = \frac{(Y - Y_1)^2 + (X - X')^2 + (YX' - Y'X)^2}{(1 + XX' + YY_1)^2}.$$

Si dans cette expression on regarde Δ comme constant et X, Y comme variables, on aura l'équation d'une circonférence de cercle en fonction des coordonnées de son pôle et de sa distance polaire Δ.

Si $\Delta = 90$ degrés, l'équation devient

$$YY' + XX' + 1 = 0;$$

c'est l'équation d'une circonférence de grand cercle (déjà trouvée plus haut).

Quand deux points sont distants de 90 degrés, le cosinus de leur distance est nul, et on a entre leurs coordonnées la relation

$$y'' y' + x'' x' + 1 = 0.$$

Quand deux circonférences de grands cercles se coupent à angle droit, leurs pôles sont distants l'un de l'autre de 90 degrés, la relation précédente a donc lieu entre les coordonnées de leurs pôles. Si les circonférences sont représentées par les équations

$$Ax + By = C, \quad A'x + B'y = C',$$

la relation précédente devient

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

Enfin si les circonférences sont représentées par les deux équations

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{6}=1,\quad \frac{x}{\alpha'}+\frac{y}{6'}=1,$$

la relation exprimant qu'elles se coupent à angle droit sera

$$\frac{1}{\alpha\alpha'}+\frac{1}{66'}+1=0.$$

Si donc on demandait l'équation d'une circonférence passant par un point (x', y') et perpendiculaire à une autre représentée par

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{6}=1,$$

on aura pour calculer α' et $6'$ la relation

$$\frac{1}{\alpha\alpha'}+\frac{1}{66'}+1=0,$$

et, de plus,

$$\frac{x'}{\alpha'}+\frac{y'}{6'}=1.$$

Ce qui donne pour équation de la circonférence perpendiculaire à une autre

$$y-y'=\frac{\alpha(1+6y')}{6(1+\alpha x')}(x-x').$$

Si les coordonnées du pôle de la circonférence donnée sont x'' et y'', comme il suffit de joindre le point donné à ce pôle, l'équation du cercle perpendiculaire sera

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x').$$

Pour calculer la distance d'un point à une circonférence de grand cercle, il suffit de prendre le complément de la distance entre son pôle et le point donné. Si donc la circonférence est représentée par

$$my + nx + p = 0,$$

et qu'on appelle Δ la distance cherchée, on aura

$$\sin \Delta = \frac{my' + nx' + p}{\pm \sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \sqrt{1 + x_1^2 + y_1^2}}.$$

L'angle de deux circonférences de grands cercles peut se mesurer par la distance de leurs pôles. Si donc les deux circonférences ont pour équations

$$Ax + By + C = 0,$$
$$A'x + B'y + C' = 0,$$

et que V représente leur angle, on aura

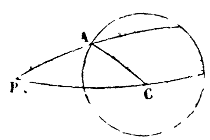
$$\cos V = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}.$$

Théorème des sécantes.

L'équation d'une circonférence peut se mettre sous une autre forme plus commode dans certains cas.

En effet, on peut déterminer la position d'un point A par sa distance ρ à un point fixe P et par l'angle ω que

FIG. 2.



fait PA avec un axe PC que nous supposerons mené par le pôle C du cercle. Nous aurons dans le triangle APC, en posant $PC = \alpha$ et $AC = r$,

$$\cos r = \cos \rho \cos \alpha + \sin \rho \sin \alpha \cos \omega.$$

Si nous regardons ρ comme inconnue, nous résoudrons aisément l'équation en posant

$$\cos\rho = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin\rho = \frac{2t}{1 + t^2},$$

t désignant $\tang\frac{\omega}{2}$: notre équation devient ainsi

$$(1) \quad (\cos r + \cos\alpha)t^2 - 2t\sin\alpha\cos\omega + \cos r - \cos\alpha = 0.$$

Le produit des racines est égal à

$$\frac{\cos r - \cos\alpha}{\cos r + \cos\alpha} = \tang\left(\frac{r + \alpha}{2}\right)\tang\left(\frac{\alpha - r}{2}\right).$$

Ainsi quand d'un point P on mène une sécante à un cercle, le produit des tangentes des demi-arcs compris entre le point P et la circonférence est constant, il est égal au carré de la tangente de la moitié de l'arc tangentiel mené du point P, si ce point est extérieur au cercle, et, dans le cas contraire, il est égal à la tangente carrée du quart de la corde minima passant par ce point.

Si par le point P on mène un grand cercle perpendiculaire à PA, pour avoir son intersection avec le cercle C, il suffira dans l'équation (1) de remplacer $\cos\omega$ par $-\sin\omega$; si l'on cherche ensuite la somme des carrés des quatre racines dans les deux équations, on trouve

$$S = \frac{4\sin^2 r}{(\cos r + \cos\alpha)^2},$$

quantité indépendante de ω. Ce qui démontre un théorème connu sur deux sécantes rectangulaires. On peut vérifier la formule en faisant

$$r = \infty, \quad \alpha = 0.$$

Ce n'est là toutefois qu'un cas particulier d'un théorème plus général auquel on parvient en augmentant successivement ω de $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$, $\frac{6\pi}{n}$ jusqu'à $\frac{2(n-1)\pi}{n}$, et, en prenant la demi-somme des carrés des racines dans toutes les équations obtenues, on trouve

$$\int = \frac{n \sin^2 r}{(\cos r + \cos \alpha)^2}.$$

Ce résultat, indépendant de ω, démontre le théorème suivant :

Si l'on divise la surface d'une sphère en n *fuseaux égaux, nous supposons* n *pair, par autant de grands cercles menés d'un même point* P, *si ensuite on les coupe par un cercle grand ou petit de rayon constant et ayant son pôle à une distance fixe du point* P, *la somme des carrés des tangentes des demi-arcs interceptés entre le point* P *et chaque point d'intersection sera constante, quelle que soit la position du cercle sécant.*

Le théorème analogue sur un plan s'énoncerait ainsi :

Si l'on construit un polygone régulier d'un nombre pair de côtés, qu'on joigne son centre P *à tous les sommets* A, B, etc., *puis qu'on trace un cercle quelconque* C *dans le plan du polygone, la somme des carrés des segments compris entre le centre* P *et les points d'intersection des rayons* PA, PB *avec le cercle* C *est constante et égale au carré du rayon pris autant de fois qu'il y a de côtés dans le polygone; si le cercle* C *ne coupe pas tous les rayons* PA, PB, etc., *ou si même il n'en coupe aucun, le théorème a également lieu en substituant aux segments les binômes imaginaires que donne la résolution des équations.*

Dans le théorème sur la sphère, si l'on suppose que le cercle sécant soit un grand cercle, on aura

$$\cos r = 0$$

et alors

$$S = \text{séc}^2 \alpha.$$

Remarque. Le théorème a également lieu pour des puissances quelconques d'un degré pair inférieur au nombre des côtés du polygone, c'est-à-dire que la somme des puissances de degré $2n$ des tangentes des demi-arcs est constante, quel que soit α.

Intersection de deux cercles, axes radicaux.

L'équation trouvée pour un cercle quelconque peut s'écrire ainsi

$$\sqrt{1 + x^2 + y^2} = m' (yy' + xx' + 1),$$

m' représentant $\dfrac{1}{\cos r_1 \sqrt{1 + x_1^2 + y_1^2}}$, m' peut être positif ou négatif; l'équation d'un second cercle sera de même

$$\sqrt{1 + x^2 + y^2} = m'' (yy'' + xx'' + 1).$$

Si on les retranche membre à membre, on trouve

$$y (m' y' - m'' y'') + x (m' x' - m'' x'') + m' - m'' = 0.$$

C'est l'équation d'un grand cercle. Elle sera vérifiée par les coordonnées des points d'intersection des deux cercles donnés, si l'on suppose qu'ils se coupent, et, dans le cas contraire, elle sera vérifiée par les racines imaginaires communes aux équations des deux cercles. Ce grand cercle s'appelle l'*axe radical des cercles donnés*.

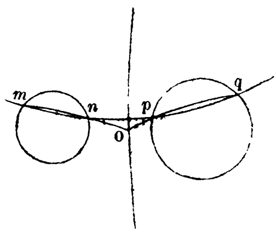
Si, étant donnés trois cercles, on prend les trois équations de leurs axes radicaux en les combinant deux à deux et qu'on les ajoute membre à membre, on trouve une identité; donc les trois axes radicaux concourent au même point.

Si l'on se reporte à la condition pour que deux grands se coupent à angle droit, on reconnaîtra que l'axe radical de deux cercles est perpendiculaire à l'arc qui joint leurs pôles.

Ainsi pour construire l'axe radical de deux cercles qui ne se rencontrent pas, on les coupera par un cercle auxiliaire coupant le premier aux points A et B, et le deuxième en deux points C et D; on tracera les arcs AB et CD; soit O leur point de rencontre : il suffira d'abaisser de O une perpendiculaire sur l'arc qui joint les pôles des cercles donnés pour avoir leur axe radical.

Définition. Si d'un point O on mène un arc de grand cercle coupant un petit cercle C aux points M et N, le produit $\tang \frac{OM}{2} \tang \frac{ON}{2}$ se nomme puissance du point O par rapport au cercle C. Cela posé, on peut dire que l'axe radical de deux cercles est le lieu des points d'égale puissance par rapport aux deux cercles. En effet, menons

FIG. 3



un cercle qui coupe les deux cercles donnés le premier aux points m, n, le deuxième aux points p, q. Traçons les arcs mn et pq. Supposons qu'ils se coupent au point O, ce point O sera un point de l'axe radical des cercles donnés, et on aura

$$\tang \frac{Om}{2} \tang \frac{On}{2} = \tang \frac{Op}{2} \tang \frac{Oq}{2}.$$

Donc le point O, et, en général, tout point appartenant à l'axe radical des cercles donnés est un point d'égale puissance par rapport aux deux cercles. C. Q. F. D.

On peut encore démontrer que si un cercle A coupe deux cercles B et C à angle droit, le cercle A aura son pôle sur l'axe radical des deux autres.

Si les pôles des deux cercles sont sur l'axe des x, l'équation de l'axe radical se réduit à

$$x(m'x' - m''x'') + m' - m'' = 0.$$

Si l'on veut que l'axe radical serve comme axe des y, il faut avoir

$$m' = m''$$

ou

$$\cos r_{,} \sqrt{1 + x'} = r_{,,} \sqrt{1 + x_{,,}^2};$$

si l'on appelle α', α'' les abscisses des deux centres, cette relation devient

$$\frac{\cos r'}{\cos \alpha'} = \frac{\cos r''}{\cos \alpha''}.$$

L'équation d'un des cercles peut alors s'écrire ainsi :

$$rx' + 1 = \frac{\cos r'}{\cos \alpha'} \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Posons

$$\frac{\cos r'}{\cos \alpha'} = h,$$

nous aurons

$$xx' + 1 = h\sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Si nous donnons à x' deux valeurs arbitraires en laissant h constant, nous aurons les équations de deux cercles ayant pour axe radical l'axe des y. Cette manière de représenter les équations de deux cercles peut servir dans quelques problèmes ou théorèmes.

Ier Exemple. Si pour un point de l'axe radical de deux cercles on détermine sa polaire relativement à chacun d'eux, ces deux polaires se coupent sur l'axe radical. (Nous supprimons la démonstration qui est très-simple.)

II^e Exemple. Étant donnés deux cercles, si l'on mène une circonférence de grand cercle perpendiculaire à la ligne des centres, et que pour chacun de ses points on trace la polaire relativement à chaque cercle, le lieu des intersections de ces polaires sera une circonférence de grand cercle symétrique de la première par rapport à l'axe radical.

La suite prochainement.