Angelo Genocchi

Extraction abrégée d’une racine cubique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 136-139
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__136_1>

EXTRACTION ABREGÉE D'UNE RACINE CUBIQUE;

PAR M. ANGELO GENOCCHI,

J'ai eu tout récemment l'occasion de m'occuper de l'extraction abrégée des racines cubiques dans un cours d'algèbre et de géométrie que je suis chargé de faire à l'université de Turin. M. Serret, dans son *Traité d'Arithmétique* (publié en 1852) exige qu'on ait déjà trouvé $n+2$ chiffres de la racine pour en déterminer n par une simple division. On trouve la même proposition dans une traduction italienne de l'*Arithmétique* de M. Bertrand, imprimée à Florence en 1856 avec des additions et des notes du traducteur. M. Amiot, dans un intéressant article (*Nouvelles Annales,* 1851, p. 254 et 257) semble même exiger qu'on connaisse au moins $n+3$ chiffres. Je me suis rangé à l'opinion de MM. Midy et Finck, qui se contentent de $n+1$ chiffres seulement (*Nouvelles Annales,* 1844, p. 239; 1846, p. 251); mais j'ai précisé avec plus de soin le cas où le quotient de la division n'est plus la valeur approchée à moins d'une unité de la partie restante de la racine.

Je rapporte mon calcul qui est assez simple.

Soient N le nombre dont on cherche la racine cubique; a le nombre formé par les $n+1$ chiffres déjà trouvés à la racine, suivis de n zéros; q le quotient et r le reste de la division de $N - a^3$ par $3a^3$.

En posant

$$\sqrt[3]{N} = A + x,$$

on a

$$\frac{N - a^3}{3a^2} = x + \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2} = q + \frac{r}{3a^2},$$

d'où

$$x = q + \frac{r}{3a^2} - \left(\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2}\right).$$

Comme $r < 3a^2$, on voit que la différence entre x et q sera toujours < 1 tant qu'on aura

$$\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2} < 1,$$

et que si cette inégalité n'a pas lieu, x sera $< q$. D'ailleurs on a $x < 10^n$ puisque la partie entière de x ne doit contenir que n chiffres. Or si x n'excède pas $10^n - \frac{1}{2}$, on peut affirmer que l'on aura

$$\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2} < 1,$$

car $3x$ n'excédera pas

$$3.10^n - \frac{3}{2} < 3\ 10^n - 1,$$

et, à cause de

$$a \geqq 10^{2n}, \quad x < 10^n,$$

on aura

$$\frac{3x}{a} + \frac{x^2}{a^2} < \frac{3.10^n - 1}{10^{2n}} + \frac{1}{10^{2n}},$$

d'où

$$\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2} < \frac{x}{10^n} < 1.$$

Mais si q ne surpasse pas 10^n lorsque x excédera $10^n - \frac{1}{2}$, la différence $q - x$ sera toujours < 1. Il faut donc qu'on ait

$$q > 10^n.$$

Or le reste $\frac{N - a^3}{10^{3n}}$ ne peut surpasser $3\left(\frac{a}{10^n}\right)^2 + 3\left(\frac{a}{10^n}\right)$, et, par conséquent, la fraction $\frac{N - a^2}{3a^2}$ ne peut pas surpasser $10^n + \frac{10^{2n}}{a}$; d'ou il s'ensuit que q sera toujours $< 10^n + 1$, excepté dans le cas de $a = 10^{2n}$. Dans ce cas

$$q = 10^n + 1, \quad r = 0,$$

$$N = 10^{3n}.[(10^n + 1)^3 - 1].$$

Voici le cas *unique* où q étant $= 10^n + 1$, $x > 10^n - \frac{1}{2}$, on aura

$$q - x > 1,$$

et, par suite, $a + q$ ne sera plus une valeur approchée de $\sqrt[3]{N}$ à moins d'une unité. Mais, dans ce cas, x étant compris entre $10^n - \frac{1}{2}$ et 10^n, $a + q - 1$ sera la racine approchée *à moins d'une demi-unité* par excès, et $a + q - 2$ la racine approchée *à moins d'une unité* par défaut. Ainsi la racine approchée se déduit toujours du quotient q; elle résulte donc toujours d'une simple division.

Au reste le cas singulier de $q - x > 1$ est assez reconnaissable soit par la forme de N, soit parce qu'alors q surpasse le plus petit nombre entier de $n + 1$ chiffres, tandis qu'on n'a besoin que de n chiffres.

Je crois donc qu'on peut prononcer sans exception que $n + 1$ chiffres de la racine suffisent pour déterminer les suivants par une simple division.

Note du Rédacteur. M. Housel m'écrit que la méthode abrégée donnée à la page 7 est déjà exposée dans les *Calculs pratiques* qu'il a publiés avec M. Babinet, et il ne met pas en doute que M. Forestier n'y soit parvenu de son côté.