

ÉMILE MATHIEU

**Solution des questions de l'algèbre Bertrand
(2e édition, chapitre XVIII)**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 17
(1858), p. 12-19

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__12_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1858, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DES QUESTIONS DE L'ALGÈBRE BERTRAND

(2^e édition, chapitre XVIII);

PAR M. ÉMILE MATHIEU,
Professeur

I. Trouver la dérivée de

$\log \operatorname{arc} \sin x, \quad \log \operatorname{arc} \cos x, \quad \log \operatorname{arc} \operatorname{tang} x.$

Pour les deux premières quantités, on a

$$\frac{1}{\pm \sqrt{1-x^2} \operatorname{arc} \sin x};$$

pour la troisième, on a

$$\frac{1}{(1+x^2) \operatorname{arc} \operatorname{tang} x}.$$

II. Trouver la dérivée de $\operatorname{arc} \sin 2x \sqrt{1-x^2}$ et dire pour quelle raison cette dérivée est double de celle de $\operatorname{arc} \sin x$.

Écrivons d'abord cette expression $\operatorname{arc} \sin \sqrt{4x^2 - 4x^4}$, sa dérivée est

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x^2+4x^4}} \times \frac{2x-4x^3}{\sqrt{x^2-x^4}} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Cette dérivée est double de celle de $\operatorname{arc} \sin x$, parce que $\operatorname{arc} \sin 2x \sqrt{1-x^2}$ est double de $\operatorname{arc} \sin x$. Posons en effet

$$x = \sin y \quad \text{ou} \quad y = \operatorname{arc} \sin x \quad (*),$$

et nous aurons

$$\operatorname{arc} \sin 2x \sqrt{1-x^2} = \operatorname{arc} \sin (2 \sin y \cos y) = 2y.$$

III. Trouver la dérivée de $\operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{a+x}{1-ax}$ et dire pour quelle raison cette dérivée est la même que celle de $\operatorname{arc} \operatorname{tang} x$.

La dérivée de $\operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{a+x}{1-ax}$ est

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2} \times \frac{1-ax + (a+x)a}{(1-ax)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{1+x^2};$$

elle est la même que celle de $\operatorname{arc} \operatorname{tang} x$, parce que

(*) Les Anglais écrivent $\operatorname{arc} \sin x = \sin^{-1} x$. Cette notation présente des avantages dans le calcul fonctionnel. 14.

arc tang $\frac{a+x}{1-ax}$ ne diffère de arc tang x que d'une constante. Posons en effet

$$a = \text{tang } \alpha, \quad x = \text{tang } \gamma,$$

et nous aurons

$$\text{arc tang } x = \gamma \text{ (*),}$$

$$\text{arc tang } \frac{a+x}{1-ax} = \text{arc tang} [\text{tang}(\alpha + \gamma)] = \gamma + \alpha.$$

IV. Trouver la dérivée de arc tang $\frac{a+b+x-ax}{1-ab-ax-bx}$.

Dire pourquoi elle est la même que la précédente. On a

$$\frac{a+b+x-ax}{1-ab-ax-bx} = \frac{\frac{a+b}{1-ab} + x}{1 - \frac{a+b}{1-ab}x}.$$

L'expression dont on cherche la dérivée est donc celle de la précédente, dans laquelle on a changé a en $\frac{a+b}{1-ab}$.

Donc la dérivée doit être encore $\frac{1}{1+x^2}$.

V. Trouver les bases dans lesquelles un nombre peut être égal à son logarithme, en employant l'un des procédés suivants :

1°. On étudiera la fonction $x - \log x$, et l'on cherchera la condition pour qu'elle puisse devenir nulle.

2°. On étudiera la fonction $\frac{x}{\log x}$, et l'on cherchera la condition pour qu'elle puisse devenir égale à l'unité.

3°. On étudiera la fonction $ax - x$, et l'on cherchera la condition pour qu'elle puisse devenir égale à zéro.

4°. On étudiera la fonction $\frac{a^x}{x}$, et l'on cherchera la condition pour qu'elle puisse devenir égale à l'unité.

(*) arc tang $x = \text{tang}^{-1} x$

Étudions d'abord la fonction $y = x - \log x$. La dérivée est

$$y' = 1 - \frac{\log e}{x}.$$

Supposons d'abord la base $a > 1$. Depuis $x = 0$ jusque $x = \log e$, y' est négatif, et depuis $x = \log e$ jusque $x = \infty$, y' est positif.

Ainsi y décroît lorsque x varie de 0 à $\log e$, et croît lorsque x varie de $\log e$ à ∞ , et la marche de la fonction sera indiquée par le tableau suivant :

$$\begin{array}{ll} x = 0, & y = \infty, \\ x = \log e, & y = \log e - \log(\log e) \text{ minimum}, \\ x = \infty, & y = \infty. \end{array}$$

Pour que la fonction y puisse devenir nulle, il faut donc que l'on ait

$$\log e - \log(\log e) < 0$$

ou

$$e < \log e,$$

ce qui devient successivement

$$e < \frac{1}{la},$$

$$la < \frac{1}{e},$$

$$a < e^{\frac{1}{e}}.$$

Si on suppose, en second lieu, la base $a < 1$, $\log e$ est négatif, il n'y a plus de minimum et y croît d'une manière continue depuis $-\infty$ jusque $+\infty$, donc y passe une fois par 0, donc la condition cherchée est bien

$$a < e^{\frac{1}{e}}.$$

2°. Etudions la fonction

$$y = \frac{x}{\log x}.$$

Nous aurons

$$y' = \frac{\log x - \log e}{(\log x)^2},$$

et y' s'annule pour $x = e$.

Supposons d'abord $a > 1$.

Pour	on aura
$x = 0,$	$y = 0,$
$x = 1 - h,$	$y =$ une quantité négative très-grande,
$x = 1,$	$y = \pm \infty,$
$x = 1 + h,$	$y =$ une quantité positive très-grande,
$x = e,$	$y = \frac{e}{\log e}$ minimum,
$x = \infty,$	$y = \infty.$

Pour que la fonction $\frac{x}{\log x}$ puisse être égale à l'unité, il faudra donc que l'on ait

$$\frac{e}{\log e} < 1 \quad \text{ou} \quad a < e^{\frac{1}{e}}.$$

Si a est < 1 , on aura

$x = 0,$	$y = 0,$
$x = 1 - h,$	$y =$ une quantité positive très-grande,
$x = 1,$	$y = \pm \infty,$
$x = 1 + h,$	$y =$ une quantité négative très-grande,
$x = e,$	$y = \frac{e}{\log e}$ maximum (quantité négative),
$x = \infty,$	$y = -\infty.$

La fonction $\frac{x}{\log x}$ passera une fois par la valeur 1, et c'est entre $x = 0$ et $x = 1$.

3°. Étudions la fonction

$$y = a^x - x.$$

Nous aurons

$$y' = a^x \log a - 1.$$

Supposons $a > 1$, y' sera négatif, lorsque x variera de $-\infty$ à $x = \log\left(\frac{1}{\log a}\right)$, et sera positif, lorsque x variera de cette valeur à $x = \infty$. Donc lorsque x varie de $-\infty$ à $\log\left(\frac{1}{\log a}\right)$, la fonction y est décroissante, et elle est décroissante depuis $x = \log\left(\frac{1}{\log a}\right)$ jusque $x = \infty$, et on a

$$x = -\infty, \quad y = +\infty,$$

$$x = \log\left(\frac{1}{\log a}\right), \quad y = \log e - \log(\log e) \text{ minimum,}$$

$$x = \infty, \quad y = \infty.$$

Pour que y s'annule, il faudra que l'on ait

$$\log e - \log(\log e) < 0,$$

ou

$$a < e^{\frac{1}{e}}.$$

Si a est < 1 , y' est constamment négatif, et la fonction y décroîtra constamment de $+\infty$ à $-\infty$, lorsque x variera de $-\infty$ à $+\infty$, donc y s'annulera une fois.

4°. Étudions la fonction

$$y = \frac{a^x}{x}.$$

Nous aurons

$$y' = \frac{xa^x \log a - a^x}{x^2}.$$

Supposons $a > 1$, on voit facilement que y est négatif lorsque x varie de $-\infty$ à $\frac{1}{\log a}$, et qu'il est positif lorsque x varie de $\frac{1}{\log a}$ à ∞ .

La fonction y décroît de 0 à $-\infty$, lorsque x varie de $-\infty$ à 0; y décroît encore de $+\infty$ à $a^{\frac{1}{la}} la$, lorsque x varie de 0 à $\frac{1}{la}$, et y croît de $a^{\frac{1}{a}} la$ à $+\infty$, lorsque x varie de $\frac{1}{la}$ à $+\infty$.

Si y passe par l'unité, $a^{\frac{1}{la}} la$ étant un minimum, on aura

$$a^{\frac{1}{la}} la < 1$$

ou

$$a < e^e.$$

Si a est < 1 , on voit facilement que y varie de $-\infty$ à $a^{\frac{1}{la}} la$, lorsque x varie de 0 à $\frac{1}{la}$; il est maximum pour $x = \frac{1}{la}$; et décroît de $a^{\frac{1}{la}} la$ à $-\infty$, lorsque x varie de $\frac{1}{la}$ à 0. Enfin y décroît de ∞ à 0, lorsque x varie de 0 à ∞ . Et on voit que y passera une fois par l'unité.

VI. Examiner si l'équation

$$x^m = m^x$$

peut admettre d'autre solution que $x = m$.

On met facilement cette équation sous la forme

$$\frac{\log x}{x} = \frac{\log m}{m}.$$

On répondra donc à la question en étudiant la fonction $\frac{\log x}{x}$, et cherchant si cette fonction peut prendre deux fois la même valeur pour des valeurs différentes m et x de la variable.

La dérivée de $y = \frac{\log x}{x}$ est $y' = \frac{\log e - \log x}{x^2}$ (*).

Nous supposons, par exemple, que les logarithmes soient les logarithmes vulgaires; alors y' sera positif, lorsque x variera de 0 à e , il sera nul pour $x = e$, et il sera négatif lorsque x variera de e à ∞ .

Ainsi y décroît, lorsque x varie de 0 à e , il est maximum pour $x = e$, et il décroît lorsque x varie de e à ∞ , et nous aurons

$$\begin{aligned} x = 0, & \quad y = -\infty, \\ x = 1, & \quad y = 0, \\ x = e, & \quad y = \frac{\log e}{e} \text{ maximum,} \\ x = \infty, & \quad y = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\frac{\log x}{x}$ prend deux fois la même valeur, lorsque x varie de e à ∞ , et l'équation

$$x^m = m^x$$

admettra deux solutions, lorsque m sera plus grand que 1; si m est < 1 , il n'y aura que la solution $x = m$.

La suite prochainement.