NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DE ROCHAS

Solution de la question 352

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 96-98

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__96_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

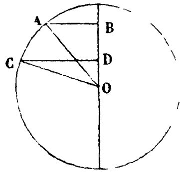
http://www.numdam.org/

SOLUTION DE LA QUESTION 352;

PAR M. DE ROCHAS,

Élève à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

Étant donné le volume d'un secteur sphérique, trouver la valeur extrême de l'aire totale. Discussion du problème.



Le volume d'un secteur sphérique est égal au produit de la hauteur h de la zone qui lui sert de base par un facteur constant $\frac{2}{3}\pi R^2$; par suite, si le volume est donné, h est une quantité constante.

Donc, pour connaître les variations de l'aire totale du secteur engendré par le secteur circulaire ACO tournant autour de BO, aire qui a pour mesure

$$2\pi R h + \pi R (AB + CD),$$

il suffit d'étudier les variations de AB + CD.

Or, si nous appelons x l'angle AOB et y l'angle COB, la question revient à chercher le maximum de

$$(1) \qquad R(\sin x + \sin y) = m,$$

sachant que

$$(2) \qquad R(\cos x - \cos y) = h.$$

Comme les angles x et y ne peuvent varier que de o à 180 degrés, leurs sinus seront toujours positifs; par suite, au lieu de chercher le maximum de m, on peut chercher le maximum de m^2.

Elevant au carré les équations (1) et (2) et les ajoutant, il vient

$$2R^2(1 + \sin x \sin y - \cos x \cos y) = m^2 + h^2$$

ou

$$m^2 = 2R^2[1 - \cos(x + y)] - h^2.$$

Dans le second membre, il n'y a que $\cos(x + y)$ qui soit variable; il est clair que m^2 sera maximum quand $\cos(x + y)$ sera égal à -1.

Mais alors

$$x + y = 180^\circ,$$

$$m = R(\sin x + \sin y) = 2R\sin x,$$

$$h = R(\cos x - \cos y) = 2R\cos x,$$

d'où

$$\cos x = \frac{h}{2R}, \quad \sin x = \frac{\sqrt{4R^2 - h^2}}{2R}, \quad m = \sqrt{4R^2 - h^2}.$$

Remplaçant h par sa valeur en fonction du volume V donné, il vient

$$m = \sqrt{4R^2 - \left(\frac{3V}{2\pi R^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{16\pi^2 R^6 - 9V^2}}{2\pi R^2}.$$

Remplaçant m par sa valeur dans l'expression de la surface cherchée, on a pour cette surface s

$$s = \frac{3V}{R} + \frac{\sqrt{(4\pi R^3)^2 - (3V)^2}}{2R}.$$

On voit que la condition de possibilité du problème est

$$V < \frac{4}{3}\pi R.$$