NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. PAINVIN

Solution de la question 295

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 85-94

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__85_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 295

(voir t. XIII, p. 315),

PAR M. L. PAINVIN,
Docteur ès Sciences mathématiques

Soit

$$(1) \qquad F(x, y) = 0$$

l'équation d'une courbe quelconque; par un point P

(α, β) pris dans son plan menons des normales qui la rencontreront, par exemple, en m points $A_1, A_2, \ldots, A_m$ (*); si (x_ι, y_ι) sont les coordonnées d'un quelconque A_ι de ces points, ces coordonnées seront données par les équations

$$(2) \qquad \frac{dF}{dx_\iota}(\beta - y_\iota) = \frac{dF}{dy_\iota}(\alpha - x_\iota),$$

$$(3) \qquad F(x_\iota, y_\iota) = 0.$$

Si nous désignons par n_ι la distance du point P, (α, β) au point A_ι, (x_ι, y_ι), on aura

$$(4) \qquad n_\iota^2 = (\alpha - x_\iota)^2 + (\beta - y_\iota).$$

Supposons qu'on établisse entre les longueurs n_ι de ces normales la relation

$$(5) \qquad \varphi(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_m) = 0.$$

Si l'on substitue dans l'équation (5) les valeurs des x_ι, y_ι, déduites des équations (2) et (3) en fonction de α et β, on aura le lieu des points P pour lesquels cette relation est satisfaite.

Le coefficient angulaire de la tangente à la courbe P sera donné par l'équation

$$d\alpha \sum \frac{d\varphi}{dn_\iota}\frac{dn_\iota}{d\alpha} + d\beta \sum \frac{d\varphi}{dn_\iota}\frac{dn_\iota}{d\beta} = 0:$$

si l'on remarque que l'on a la relation

$$\frac{dF}{dx_\iota}\frac{dx_\iota}{d\alpha} + \frac{dF}{dy_\iota}\frac{dy_\iota}{d\alpha} = 0,$$

qui devient, en vertu de l'équation (2),

$$(\alpha - x_\iota)\frac{dx_\iota}{d\alpha} + (\beta - y_\iota)\frac{dy_\iota}{d\alpha} = 0,$$

(*) Si p est le degre de la courbe, alors $m = p^2$ Tm.

on trouvera que

$$\frac{dn_i}{d\alpha} = \frac{\alpha - x_i}{n_i},$$

et par un calcul semblable

$$\frac{dn_i}{d\beta} = \frac{\beta - y_i}{n_i},$$

n_i ayant la valeur (4).

On aura donc pour le coefficient angulaire de la tangente à la courbe P au point (α, β) la valeur suivante :

$$(6) \qquad \frac{d\beta}{d\alpha} = - \frac{\alpha - \dfrac{\sum \frac{1}{n_i}\frac{d\varphi}{dn_i}.x_i}{\sum \frac{1}{n_i}\frac{d\varphi}{dn_i}}}{\beta - \dfrac{\sum \frac{1}{n_i}\frac{d\varphi}{dn_i}y_i}{\sum \frac{1}{n_i}\frac{d\varphi}{dn_i}}}.$$

Considérons maintenant un point Q ayant pour coordonnées (a, b) et désignons par l_i la distance de ce point au point A_i, de sorte qu'on aura

$$(7) \qquad l_i^2 = (a - x_i)^2 + (b - y_i)^2.$$

Déterminons le lieu des points Q par la condition que la relation

$$(8) \qquad \varphi(l_1, l_2, l_3, \ldots, l_m) = 0$$

soit satisfaite, φ étant la même caractéristique que dans l'équation (5).

La courbe P sera donc déterminée par les équations (2), (3), (4) et (5) entre lesquelles on éliminera les x_i et y_i ; la courbe Q sera déterminée par les équations (2), (3), (7) et (8) entre lesquelles on éliminera les x_i et y_i.

A chaque point (α, β) de la courbe P correspondra une courbe Q (*).

Pour obtenir le coefficient angulaire de la tangente à la courbe Q en un point quelconque (a, b), remarquons que les x_i et y_i ne sont fonctions ni de a ni de b; on a donc immédiatement

$$\frac{dl_i}{da} = \frac{a - x_i}{l_i}, \quad \frac{dl_i}{db} = \frac{b - y_i}{l_i},$$

et, par conséquent,

$$(9) \qquad \frac{db}{da} = - \frac{a - \dfrac{\sum \frac{1}{l_i} \frac{d\varphi}{dl_i} x_i}{\sum \frac{1}{l_i} \frac{d\varphi}{dl_i}}}{b - \dfrac{\sum \frac{1}{l_i} \frac{d\varphi}{dl_i} y_i}{\sum \frac{1}{l_i} \frac{d\varphi}{dl}}}.$$

Or si l'on fait

$$a = \alpha, \quad b = \beta,$$

il en résulte

$$l_i = n_i,$$

on arrive alors facilement aux conclusions suivantes :

1°. La courbe Q passe par le point (α, β), car pour $a = \alpha$ et $b = \beta$, l'équation (8) se trouve satisfaite en vertu de l'équation (5); d'ailleurs ce résultat était évident à priori.

2°. La courbe Q touche la courbe P au point (α, β); car si l'on fait

$$a = \alpha, \quad b = \beta,$$

(*) Dans la courbe P, les points A varient; ils sont fixes dans la courbe Q
Tm.

les équations (6) et (9) montrent que l'on a

$$\frac{db}{da} = \frac{d\beta}{d\alpha};$$

donc les deux courbes ont la même tangente au point (α, β).

3°. Si l'on suppose que les points A_i aient des masses respectivement égales $\frac{1}{n_i} \frac{d\varphi}{dn_i}$, qu'on compose ces masses comme des forces parallèles et qu'on désigne par G le point d'application de la résultante, je dis que la normale à la courbe P au point (α, β) passera par le point G.

En effet, le point G a pour coordonnées

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{\sum \frac{1}{n_i} \frac{d\varphi}{dn_i} x_i}{\sum \frac{1}{n_i} \frac{d\varphi}{dn_i}}, \\ \eta &= \frac{\sum \frac{1}{n_i} \frac{d\varphi}{dn_i}}{\sum \frac{1}{n_i} \frac{d\varphi}{dn_i}}. \end{aligned} \right.$$

L'équation de la normale à la courbe P au point (α, β) est

$$(11) \qquad \frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{X - \alpha}{Y - \beta},$$

$\frac{d\beta}{d\alpha}$ ayant la valeur (6), X et Y étant les coordonnées courantes. On voit immédiatement que l'équation (11) est vérifiée pour $X = \xi$ et $Y = \eta$, ce qui démontre la proposition énoncée.

Lorsque

$$\varphi = \sum n_i^2 - k^2 = 0,$$

k^2 étant une constante, alors

$$\xi = \frac{\Sigma x_\iota}{m},$$

$$\eta = \frac{\Sigma y_\iota}{m},$$

le point G est le centre de gravité des points A_1, A_2,..., A_m.

Lorsque $\varphi = \sum n_\iota - k^2 = 0$,

$$\xi = \frac{\sum \frac{x_\iota}{n_\iota}}{\sum \frac{1}{n_\iota}},$$

$$\eta = \frac{\sum \frac{y_\iota}{n_\iota}}{\sum \frac{1}{n_\iota}}.$$

Lorsque $\varphi = n_1, n_2, \ldots, n_m - k^2 = 0$,

$$\xi = \frac{\sum \frac{x_\iota}{n_\iota^2}}{\sum \frac{1}{n_\iota^2}},$$

$$\eta = \frac{\sum \frac{y_\iota}{n_\iota^2}}{\sum \frac{1}{n_\iota^2}};$$

ce qui fournit deux autres théorèmes analogues à celui qui est énoncé dans la question que je traite.

4°. Si l'on suppose que les points A_ι aient des masses respectivement égales à $\frac{1}{l_\iota}\frac{d\varphi}{dl_\iota}$, qu'on compose ces masses comme des forces et qu'on désigne par G_1 le point d'application de la résultante, la normale à la courbe Q, au point quelconque (a, b) passera par le point G_1.

Pour les mêmes points $A_1, A_2, \ldots, A_m$ correspondants au point (α, β) de la courbe P, le point G_1 variera en même temps que le point (a, b) sur la courbe Q correspondante au même point (α, β).

Pour démontrer la proposition, remarquons que le point G_1 a pour coordonnées

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\sum \frac{1}{l_i}\frac{d\varphi}{dl_i} x_i}{\sum \frac{1}{l_i}\frac{d\varphi}{dl_i}}, \\ \eta_1 &= \frac{\sum \frac{1}{l_i}\frac{d\varphi}{dl_i} y_i}{\sum \frac{1}{l_i}\frac{d\varphi}{dl_i}}. \end{aligned}\right.$$

L'équation de la normale au point quelconque (a, b) est

$$(13)\qquad \frac{db}{da} = -\frac{X-a}{Y-b},$$

$\frac{db}{da}$ ayant la valeur (9), X et Y étant les coordonnées courantes. Il est évident que l'équation (13) est vérifiée pour

$$X = \xi_1 \quad \text{et} \quad Y = \eta_1.$$

Lorsque $\varphi = \sum n_i^2 - k^2 = 0$,

$$\xi_1 = \frac{\Sigma x_i}{m},$$

$$\eta_1 = \frac{\Sigma y_i}{m},$$

alors le point G_1 coïncide avec le point G; donc toutes les normales à la courbe Q passent par le même point G; donc, dans ce cas, la courbe Q est un cercle qui a son centre en G, et qui a pour rayon la distance du point G au point (α, β).

Le calcul direct conduit au même résultat. En effet, l'équation de la courbe Q est, dans ce cas,

$$\sum [(a - x_i)^2 + (b - y_i)^2] = k^2.$$

Or cette équation, en ayant égard à l'équation

$$\sum [(\alpha - x_i)^2 + (\beta - y_i)^2] = k^2,$$

lieu des points P, peut se mettre sous la forme

$$(a - \xi)^2 + (b - \eta)^2 = (\alpha - \xi)^2 + (\beta - \eta)^2,$$

où

$$\xi = \frac{\Sigma x_i}{m}, \quad \eta = \frac{m}{\Sigma y_i},$$

ce qui vérifie parfaitement l'énoncé précédent.

5°. Le lieu du point G_1 s'obtiendra en éliminant a et b entre les équations (8) et (11).

Dans le cas de

$$\varphi = \sum n_i^2 - k^2 = 0,$$

ce lieu est le point G.

Le lieu des points G s'obtiendra en éliminant α et β entre les équations (5) et (10).

6°. Il résulte de la proposition 2° que la courbe P est l'enveloppe des courbes Q (*).

On peut d'ailleurs vérifier cette propriété par le calcul

Application.

Prenons pour la courbe (1)

$$y^2 = 2px,$$

(*) Car (α, β) est un point quelconque de la courbe P. Tm.

et supposons

$$\varphi = \sum n_i - k^2 = 0.$$

Les (x_i, y_i) seront donnés par les équations

$$y^2 = 2px,$$
$$(\alpha - x)y + p(\beta - y) = 0,$$

qui peuvent se mettre sous la forme

$$(14)\qquad \begin{cases} y^3 - 2p(\alpha - p)y - 2p^2\beta = 0, \\ x = \dfrac{y^2}{2p}. \end{cases}$$

Soient y_1, y_2, y_3 les trois racines de la première des équations (14) et x_1, x_2, x_3 les valeurs correspondantes données par la seconde; on aura, sachant que

$$n_i^2 = (\alpha - x_i)^2 + (\beta - y_i)^2,$$

$$(15)\qquad \begin{cases} 3(\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha(x_1 + x_2 + x_3) - 2\beta(y_1 + y_2 + y_3) \\ \qquad + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = k^2. \end{cases}$$

En s'appuyant sur les formules qui donnent la somme des puissances semblables des racines en fonction des coefficients, on trouve

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$
$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = -4p(p - \alpha),$$
$$y_1^4 + y_2^4 + y_3^4 = 8p^2(p - \alpha)^2,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2p}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = -2(p - \alpha),$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2(p - \alpha)^2.$$

L'équation de la courbe P sera donc

$$(16)\qquad \alpha^2 + 3\beta^2 + 4p\alpha = 2p^2 + k^2;$$

c'est une ellipse dont l'un des axes principaux est dirigé suivant l'axe des x (*).

On trouvera facilement

$$(17)\qquad \begin{cases} \xi = -\dfrac{2}{3}(\alpha + p), \\ \eta = 0. \end{cases}$$

La courbe Q est un cercle dont le centre sera donné par les valeurs (17) et son rayon est égal à la distance du point (α, β) au point (ξ, η). La courbe Q aura donc pour équation

$$(18)\qquad \left[a + \frac{2}{3}(\alpha + p)\right]^2 + b^2 = \frac{1}{9}(\alpha - 2p)^2 + \beta^2.$$

Les coordonnées du point G_1 seront

$$(19)\qquad \begin{cases} \xi_1 = -\dfrac{2}{3}(\alpha + p), \\ \eta_1 = 0. \end{cases}$$

Le lieu des points G_1 s'obtiendra en éliminant a et b entre les équations (18) et (19), ce lieu est donc un point déterminé par les équations (19).

Le lieu des points G s'obtiendra en éliminant α et β entre les équations (16) et (17); ce lieu est donc la droite $\eta = 0$, c'est-à-dire l'axe des x, ce qui constitue une propriété remarquable dont il est facile de donner l'énoncé.

Les propriétés générales que nous venons d'établir subsistent non-seulement pour des courbes algébriques, mais encore pour les courbes transcendantes telles, que les normales menés d'un point quelconque à la courbe sont en nombre fini (**).

(*) Lorsque la courbe donnee est une conique quelconque, la courbe P, dans le cas actuel, est aussi une conique. Tm.

(**) Dans une courbe transcendante, les normales sont toujours en nombre infini, en comprenant les normales imaginaires et celles qui sont