

H. ROCHETTE

Solution analytique de la question 348

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16 (1857), p. 82-85

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__82_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION 548

(voir t. XX, p. 407),

PAR LE P. H. ROCHETTE, S. J.

Étant donnés une conique dont les foyers sont F et F' et un point quelconque M dans le plan de cette conique ; si l'on mène MF rencontrant la conique en A et B et MF' rencontrant la conique en C et D, on aura

$$\frac{1}{MA} \pm \frac{1}{MB} = \frac{1}{MC} \pm \frac{1}{MD},$$

le signe — répondant au cas où le point M est extérieur.

Ellipse. Soit

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation de la courbe ; par le centre menons deux diamètres respectivement parallèles aux sécantes données AB et CD. Leurs équations seront

$$(2) \quad y = mx, \quad y = m'x$$

et celles des secantes parallèles qui passent par les foyers seront

$$(3) \quad y = m(x + c), \quad y = m'(x - c).$$

Si nous désignons par d et d' les demi-diamètres et par (x', y') , (x'', y'') les coordonnées des points où ils rencontrent la courbe, nous aurons

$$d^2 = x'^2 + y'^2, \quad d'^2 = x''^2 + y''^2,$$

et, en éliminant (x', y') , (x'', y'') entre ces deux équations et les équations (1) et (2),

$$(4) \quad d^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + m^2)}{a^2 m^2 + b^2}, \quad d'^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + m'^2)}{a^2 m'^2 + b^2},$$

d'où

$$(5) \quad \frac{d^2}{d'^2} = \frac{(1 + m^2)(a^2 m'^2 + b^2)}{(1 + m'^2)(a^2 m^2 + b^2)}.$$

Désignons par S et S' les longueurs AB , CD des sécantes données et exprimons S et S' en fonction des coordonnées

$$[(x_1, y_1) (x'_1, y'_1)], \quad [(x_2, y_2) (x'_2, y'_2)]$$

des points où elles rencontrent la courbe. Les abscisses de ces points nous seront données par les deux équations suivantes :

$$(a^2 m^2 + b^2) x^2 + 2 a^2 m^2 c x + a^2 m^2 c^2 - a^2 b^2 = 0,$$

$$(a^2 m'^2 + b^2) x^2 - 2 a^2 m'^2 c x + a^2 m'^2 c^2 - a^2 b^2 = 0.$$

Nous aurons donc

$$x_1 - x'_1 = \frac{\sqrt{4 a^4 m^4 c^2 - 4 (a^2 m^2 + b^2) (a^2 m^2 c^2 - a^2 b^2)}}{(a^2 m^2 + b^2)},$$

d'où l'on tire, en remplaçant c^2 par sa valeur $a^2 - b^2$ et

réduisant,

$$(6) \quad (x_1 - x'_1)^2 = \frac{2n^2 b^4 (1 + m^2)}{(a^2 m^2 + b^2)^2}.$$

On obtient $(x_2 - x'_2)^2$ en changeant m en m' dans l'expression (6). On a ainsi

$$(7) \quad (x_2 - x'_2)^2 = \frac{2a^2 b^4 (1 + m'^2)}{(a^2 m'^2 + b^2)^2}.$$

Il est facile de passer du carré des différences des abscisses à celui des ordonnées; car les équations (3) donnent

$$y_1 - y'_1 = m(x_1 - x'_1),$$

$$y_2 - y'_2 = m'(x_2 - x'_2),$$

et il vient

$$(8) \quad (y_1 - y'_1)^2 = \frac{2a^2 b^4 (1 + m^2) m^2}{(a^2 m^2 + b^2)^2},$$

$$(9) \quad (y_2 - y'_2)^2 = \frac{2a^2 b^4 (1 + m'^2) m'^2}{(a^2 m'^2 + b^2)^2}.$$

Faisons la somme des expressions (6) et (8), (7) et (9) et extrayons les racines carrées, nous obtiendrons S et S' :

$$(10) \quad S = \frac{2ab^2(1 + m^2)}{a^2 m^2 + b^2},$$

$$(11) \quad S' = \frac{2ab^2(1 + m'^2)}{a^2 m'^2 + b^2},$$

d'où

$$(12) \quad \frac{S}{S'} = \frac{(1 + m^2)(a^2 m'^2 + b^2)}{(1 + m'^2)(a^2 m^2 + b^2)},$$

et, à cause du rapport commun aux relations (5) et (12),

$$\frac{S}{S'} = \frac{d^2}{d'^2}.$$

Mais on a (Briot et Bouquet, *Géométrie analytique*, page 377)

$$\frac{MA \cdot MB}{MC \cdot MD} = \frac{d^2}{d'^2}.$$

Nous aurons donc, en remplaçant $\frac{S}{S'}$ par sa valeur,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{MB \pm MA}{MD \pm MC} = \frac{MA \cdot MB}{MC \cdot MD}$$

ou

$$\frac{1}{MA} \pm \frac{1}{MB} = \frac{1}{MC} \pm \frac{1}{MD},$$

et on voit facilement que le signe — doit être pris dans le cas où le point M est extérieur.

Hyperbole. La démonstration serait absolument la même, à quelques signes près qui changent dans les formules intermédiaires.

Parabole. Dans la parabole, l'un des foyers s'éloignant à l'infini, l'une des sécantes menées par le point M devient parallèle à l'axe, MB devient infini et l'on a

$$\frac{1}{MA} = \frac{1}{MC} \pm \frac{1}{MD}.$$
