NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Notes sur quelques questions du programme officiel

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 72-75

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__72_1>

NOTES SUR QUELQUES QUESTIONS DU PROGRAMME OFFICIEL.

V.

Loi de l'homogénéité.

On a donné de cette loi deux énoncés qui diffèrent essentiellement. Suivant quelques auteurs, la loi de l'homogénéité consisterait en ce que :

Si des lettres a, b, c,..., *qui entrent dans une équation représentent des lignes et qu'aucune ligne particulière n'ait été prise pour unité, l'équation doit être homogène ou être la somme de plusieurs équations homogènes.*

D'après cet énoncé, il se peut que l'équation obtenue, en ne prenant aucune ligne particulière pour unité, ne soit pas homogène. Or, c'est ce que d'autres auteurs n'admettent pas. Dans leur énoncé, *l'équation est nécessairement homogène.*

L'un des Traités de Géométrie analytique, où l'on trouve ce second énoncé, contient de plus les observations que voici :

« ... On fait consister maintenant le théorème de l'ho-
» mogénéité en ce que toute équation géométrique est
» nécessairement homogène, *ou*, du moins, la somme de
» plusieurs équations homogènes. Avec un pareil énoncé,
» la proposition devient évidemment insignifiante; car,
» quelle est l'équation, écrite au hasard par un algé-

» briste, qui ne puisse être conçue décomposée en équa-
» tions homogènes, d'après la seule précaution d'y grou-
» per convenablement les termes? Il est certainement
» impossible que ceux qui entendent ainsi la loi de l'ho-
» mogénéité fassent aucun usage des précieux moyens de
» vérification continue qu'elle est surtout destinée à four-
» nir spontanément dans toutes les applications possibles
» de l'analyse mathématique.

» Sans nous arrêter davantage à cette vicieuse doc-
» trine, procédons directement à la véritable explica-
» tion. »

Et l'auteur procède effectivement à une explication. Mais, ceux qui ont affirmé que l'équation peut être la somme de plusieurs équations homogènes de degrés différents, ont aussi donné une explication qui, sans doute, leur a semblé être la véritable explication. C'est pourquoi il serait utile que le *Programme officiel* fît savoir quelle est de ces deux lois la vraie loi de l'homogénéité, c'est-à-dire celle qu'il faut pouvoir expliquer pour être admis à l'Ecole Polytechnique.

Puisque rien d'officiel ne s'y oppose encore, je dirai qu'il est impossible d'admettre qu'une équation obtenue, en ne prenant aucune ligne particulière pour unité, ne soit pas homogène, si l'on adopte la définition suivante qui a été donnée par M. Cauchy (*Leçons sur le calcul différentiel*, page 216) :

« *On dit qu'une fonction de plusieurs variable est*
» HOMOGÈNE, *lorsqu'en faisant croître ou décroître tou-*
» *tes les variables dans un rapport donné, on obtient*
» *pour résultat la valeur primitive de la fonction mul-*
» *tipliée par une puissance de ce rapport. L'exposant*
» *de ce rapport est le degré de la fonction homogène.*

» En conséquence, $f(x, y, z, \ldots)$ sera une fonction
» homogène du degré a, si t désignant une nouvelle va-

» riable on a, quel que soit t,

$$f(tx, ty, tz, \ldots) = t^a f(x, y, z, \ldots) \text{ »}$$

De plus, on dit qu'une équation

$$f(x, y, z, \ldots) = 0$$

est homogène lorsque son premier membre $f(x, y, z \ldots)$ est une fonction homogène.

Ces définitions admises, représentons par

$$f(a, b, c, \ldots) = 0$$

une équation algébrique dans laquelle les lettres a, b, c, etc., expriment les valeurs numériques des lignes d'une figure, mesurées avec une unité arbitraire.

On pourra, en séparant un monôme A des autres termes, écrire l'équation proposée de cette manière :

$$A + \varphi(a, b, c, \ldots) = 0 \text{ (*)},$$

l'expression $\varphi(a, b, c, \ldots)$ désignant une fonction algébrique quelconque dont la valeur ne peut être nulle puisque le monôme A est différent de zéro.

Si l'on fait varier l'unité qui a donné pour mesures des lignes de la figure les nombres a, b, c, etc., et qu'on prenne une nouvelle unité qui soit, par exemple, k fois moindre que la première, il est clair que les longueurs des lignes représentées d'abord par a, b, c, etc., auront pour valeurs numériques ak, bk, ck, etc. De sorte qu'en

(*) Si le premier membre de $f(a, b, c, \ldots) = 0$ est la somme de plusieurs radicaux de la forme $\sqrt[p]{A + B + C \ldots}$, en élevant l'équation à une puissance égale à l'indice p de l'un de ces radicaux, on trouvera, au moins, un monôme parmi les termes de l'équation résultante, et l'on pourra donner à cette équation la forme

$$A + \varphi(a, b, c, \ldots) = 0$$

désignant par m le degré du monôme A, la valeur de ce monôme deviendra Ak^m et $\varphi(a, b, c,\ldots)$ prendra la valeur $\varphi(ak, bk, ck,\ldots)$.

Or, l'équation

$$(1) \qquad A + \varphi(a, b, c, \ldots) = 0$$

exprime une relation qui, par hypothèse, doit exister quelle que soit l'unité qui serve à mesurer les lignes de la figure, on a donc

$$(2) \qquad Ak^m + \varphi(ak, bk, ck, \ldots) = 0.$$

Cela posé, si l'on multiplie par k^m l'équation (1), elle devient

$$(3) \qquad Ak^m + k^m\varphi(a, b, c, \ldots) = 0.$$

Et, en comparant les équations (2) et (3) on voit que

$$\varphi(ak, bk, ck, \ldots) = k^m\varphi(a, b, c, \ldots).$$

Donc, en remplaçant les variables a, b, c, etc., par par ak, bk, ck, etc., la fonction

$$A + \varphi(a, b, c, \ldots)$$

devient

$$Ak^m + k^m\varphi(a, b, c, \ldots)$$

ou

$$[A + \varphi(a, b, c, \ldots)]\,k^m.$$

Par conséquent, l'équation

$$A + \varphi(a, b, c, \ldots) = 0$$

est homogène. G.