BOURDELLES

# Solution de la question 348 (Mannheim)

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 16 (1857), p. 50-52

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__50_1>

## SOLUTION DE LA QUESTION 348 (MANNHEIM)

(voir t. XV, p. 407),

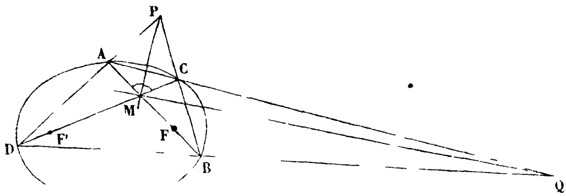
PAR M. BOURDELLES,

Élève du Lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Étant donnés une conique dont les foyers sont F et F′ et un point quelconque M dans l'intérieur de cette conique; si l'on mène MF rencontrant la conique en A et B, et MF′ rencontrant la conique en C et D, on aura

$$\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}=\frac{1}{MC}+\frac{1}{MD}.$$

Lorsque le point M est intérieur, les sommes sont remplacées par des différences.




Soit P le point d'intersection des droites AD et CB, soit Q celui des droites AC et DB, joignons le point M aux points P et Q.

Si l'on remarque qu'il résulte de la construction précédente que PM est la polaire du point Q, que MQ est celle du point P, et que les droites MA, MP, MC, MQ forment un faisceau harmonique, comme ces droites MA et MC passent chacune par un foyer de la section conique, les droites MP et MQ sont rectangulaires; elles sont donc les bissextrices des angles formés au point M par les droites AB et DC.

En vertu de la proposition énoncée par M. Mannheim (*Nouvelles Annales,* tome XV, p. 383), si l'on considère l'angle P et les transversales DC et AB, on a

$$\frac{1}{\mathrm{PMA}}+\frac{1}{\mathrm{PMB}}=\frac{1}{\mathrm{PMC}}+\frac{1}{\mathrm{PMD}},$$

ou bien, en exprimant les surfaces de ces triangles en fonction de deux côtés et de l'angle compris par ces côtés, on aura

$$\frac{1}{\mathrm{MP}\sin\mathrm{PMA}}\left(\frac{1}{\mathrm{MA}}+\frac{1}{\mathrm{MB}}\right)=\frac{1}{\mathrm{MP}\sin\mathrm{PMC}}\left(\frac{1}{\mathrm{MC}}+\frac{1}{\mathrm{MD}}\right),$$

et comme les angles AMP, PMC sont égaux, en multipliant les deux membres de l'égalité précédente par les quantités

4.

égales

$$MP \sin PMA = MP \sin PMC,$$

on obtient

$$\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} = \frac{1}{MC} + \frac{1}{MD}.$$

C. Q. F. D.

Si le point M est extérieur, il est évident que la somme serait remplacée par la différence, car alors on partirait de la relation

$$\frac{1}{PMA} - \frac{1}{PMB} = \frac{1}{PMC} - \frac{1}{PMD}.$$

La propriété subsiste pour une conique quelconque.