AUBERT

Solution de la même question 339

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 48-50

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__48_0>

SOLUTION DE LA MÊME QUESTION 339;

Par M. AUBERT.
Professeur

Soient O le centre de la circonférence donnée que je prends pour origine d'axes rectangulaires, r son rayon, C, C', C'',... les centres des circonférences qui coupent à angle droit la circonférence O, et R, R', R'',... leurs rayons.

α, β sont les coordonnées du point C,
α', β' » C',
α'', β'' » C,
. . . .

L'équation de l'axe radical des circonférences C et C' est

$$(2y - \beta - \beta')(\beta' - \beta)$$
$$+ (2x - \alpha - \alpha')(\alpha' - \alpha) - R^2 + R'^2 = 0;$$

elle devient, par un calcul très-facile, eu égard aux relations

$$\alpha^2 + \beta^2 = R^2, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 = R'^2,$$

qui expriment que les circonférences C, C' coupent à angle droit la circonférence O,

$$(\beta' - \beta)y + (\alpha' - \alpha)x = 0,$$

équation d'une droite qui passe par le centre O de la circonférence donnée.

De même, l'équation de l'axe radical des cercles C, C'' sera

$$(\beta'' - \beta)y + (\alpha'' - \alpha)x = 0,$$

équation identique avec la précédente, car les points C, C′, C″,... étant en ligne droite, on a

$$\frac{6'-6}{\alpha'-\alpha}=\frac{6''-6}{\alpha''-\alpha}.$$

Donc il n'y a pour tous les cercles C, C′, C″,... pris deux à deux qu'un seul axe radical.

Maintenant considérons ensemble les trois circonférences O, C, C′. L'axe radical de O et C est représenté par l'équation

$$(2y-6)6+(2x-\alpha)\alpha+R^2-r^2=0,$$

qui, toutes réductions faites, devient

$$6y+\alpha x-r^2=0. \tag{1}$$

L'équation de l'axe radical des circonférences O et C′ sera

$$6'y+\alpha' x-r^2=0. \tag{2}$$

Les coordonnées du centre radical des cercles O, C, C′ sont les valeurs de x et y qui conviennent aux équations (1) et (2), valeurs qui vérifient l'équation

$$(6'-6)y+(\alpha'-\alpha)x=0,$$

qui n'est autre que la différence des équations (1) et (2) : ce qu'on sait d'ailleurs.

Le centre radical des circonférences O, C, C″ serait donné par les équations

$$6y+\alpha x-r^2=0,\quad 6''y+\alpha'' x-\alpha^2=0,$$

qui, en vertu de la relation

$$\frac{6'-6}{\alpha'-\alpha}=\frac{6''-6}{\alpha''-\alpha},$$

sont identiques avec le système des équations (1) et (2).

Donc il n'y a qu'un centre radical.

La même question peut être résolue par de simples considérations géométriques de la manière suivante :

Les rayons de la circonférence O menés aux points de rencontre de celle-ci avec les circonférences C, C′, C″ sont pour ces dernières des tangentes égales issues du point O qui appartient ainsi à tous les axes radicaux ; d'ailleurs tous ces axes devant être perpendiculaires à la droite qui joint les points C, C′, C″,... se réduisent à un seul, puisque du point O on ne peut mener qu'une perpendiculaire à cette droite.

On sait que les axes radicaux de trois cercles se coupent en un même point qui est le centre radical de ces cercles. D'après cela, le centre radical des trois cercles O. C, C′ se trouvera au point de rencontre de l'axe radical commun avec l'axe radical des cercles O et C ; de même, le centre radical des cercles O, C, C″ sera au point de rencontre déjà mentionné, et ainsi de suite, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un centre radical.