Nouvelles annales de mathématiques

Chanson

Solution de la question 392 (Prouhet)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 456-459

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__456_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 392 (PROUHET)

(voir page 311);

PAR M. CHANSON,
Élève du lycée de Versailles (classe de M. Vannson).

Si l'équation

$$(1) \qquad f(x) = 0$$

est de degré *pair*, et si ses racines peuvent se partager en couples donnant la même somme $2s$, l'équation

$$f'(x) = 0 \tag{2}$$

admettra la racine s, et ses autres racines se partageront en couples donnant la même somme $2s$.

Si l'équation (1) est de degré *impair*, ayant une racine égale à s et toutes ses autres racines pouvant se partager en couples dont la somme égale $2s$, les racines de l'équation (2) se partageront aussi par couples donnant la même somme $2s$.

Dans le premier cas, les équations

$$f'(x) = 0, \quad f'''(x) = 0, \quad f^{\mathrm{v}}(x) = 0,$$

et dans le second les équations

$$f(x) = 0, \quad f''(x) = 0, \quad f^{\mathrm{iv}}(x) = 0$$

auront en commun la racine s.

Je m'occupe d'abord du premier cas. Puisque les racines se partagent par couples donnant la même somme $2s$, le polynôme $f(x)$ peut se décomposer de la manière suivante

$$f(x) = (x-a)[x-(2s-a)](x-b)[x-(2s-b)]\ldots$$

ou bien

$$f(x) = [x^2 - 2sx + a(2s-a)] \\ \times [x^2 - 2sx + b(2s-b)].$$

Prenant la dérivée d'un produit suivant la règle, j'ai

$$f'x = 2(x-s) \\ \times \left[\frac{fx}{x^2 - 2sx + a(2s-a)} + \frac{f(x)}{x^2 - 2sx + b(2s-b)}\ldots\right].$$

Je remarque d'abord que l'équation

$$f'(x) = 0$$

admet bien la racine s, puisque $f'(x)$ est divisible par $(x-s)$.

De plus, si ayant supprimé le facteur commun $(x-s)$, je considère l'équation composée d'une somme de produits

$$[x^2-2sx+a(2s-a)][x^2-2sx+b(2s-b)]\ldots=0,$$

je vois que le premier membre ne change pas quand on y remplace x par $2s-x$. Si donc un nombre x' est racine, $2s-x'$ le sera aussi, et les racines se distribueront bien par couples donnant la même somme $2s$, comme il fallait le démontrer.

Je passe au second cas.

Le polynôme peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}fx=(x-s)&[x^2-2sx+\alpha(2s-\alpha)]\\ &\times[x^2-2sx+\beta(2s-\beta)]\ldots;\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}f'x=&\frac{fx}{x-s}+\frac{2(x-s)fx}{x^2-2sx+\alpha(2s-\alpha)}\\ &+\frac{2(x-s)fx}{x^2-2sx+\beta(2s-\beta)}+\ldots.\end{aligned}$$

Comme précédemment, si je remplace dans ce polynôme x par $(2s-x)$, il ne changera pas de valeur.

Car dans le premier terme les deux termes de la fraction changent de signe en conservant la même valeur absolue. La fraction reste donc la même.

Il en est de même des autres.

Ainsi donc encore, si un nombre x' est racine de l'équation

$$f'(x)=0,$$

$2s-x'$ l'est aussi. Autrement dit, les racines de cette équation se partagent par couples donnant la même somme $2s$: ce qu'il fallait démontrer.

Or maintenant $f'x$ est un polynôme de degré pair, dont les racines se partagent par couples donnant la même somme $2s$. Donc, d'après la première partie du théorème,

$$f''(x) = 0$$

admet la racine s, s est de degré impair.

Et les autres racines se distribueront par couples donnant la même somme $2s$. Donc, d'après la seconde partie du théorème, l'équation

$$f'''(x) = 0$$

sera de degré pair et ses racines jouiront de la même propriété. On en conclura encore que l'équation

$$f^{\text{IV}}(x) = 0$$

admet la racine s.

Alors on voit que si $f(x) = 0$ est de degré impair, les équations

$$f(x) = 0, \quad f''(x) = 0, \quad f^{\text{IV}}(x) = 0, \ldots$$

admettent en commun la racine s.

Et on ferait voir de la même manière que si $f(x)$ est de degré pair, les équations

$$f'(x) = 0, \quad f'''(x) = 0, \quad f^{\text{V}}(x) = 0, \ldots$$

admettent la racine s.