

CHANSON

Solution de la question 397

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16 (1857), p. 449-452

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__449_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 397

(voir page 390).

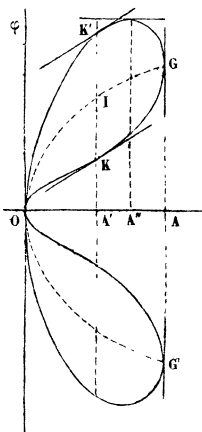
PAR M. CHANSON,

Élève du lycée de Versailles (classe de M. Vannson).

Discuter la courbe du quatrième degré donnée par l'équation

$$y = \sqrt{ax} + \sqrt{ax - x^2}.$$

On remarque d'abord que si l'on prend une longueur $OA = u$ dans le sens des x positifs, et qu'on mène par le



point A une parallèle à l'axe des y , la courbe est tout entière comprise entre ces deux parallèles. De plus la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x , car en rétablissant le double signe devant chaque radical, les valeurs de y correspondantes à une même abscisse sont deux à deux égales et de signes contraires,

$$y = \pm \sqrt{ax} \pm \sqrt{x(a-x)}.$$

Je discute donc la partie de courbe située au-dessus de l'axe des x

$$y = \sqrt{ax} \pm \sqrt{a(a-x)}.$$

La parabole $y = \sqrt{ax}$ est une courbe diamétrale pour des cordes parallèles aux y . Or, si je prends à partir du point A une longueur AG égale au paramètre a , la parabole passera en G; en appelant φ la longueur qu'il faut porter en dessus et en dessous à partir de la parabole, on a $\varphi = 0$ pour $x = a$ (*).

Donc le point G est un point de la courbe. De même pour $x = 0$, on a $\varphi = 0$, et comme entre $x = 0$ et $x = a$ φ reste positif, il passe par un maximum, qui s'obtient en égalant les deux facteurs sous le radical, puisque leur somme est constante.

Si donc, au milieu A' de OA, j'élève une perpendiculaire à l'axe des x , et qu'à partir du point I, où elle coupe la courbe, je porte deux longueurs IK' et IK égales à OA' ou a , j'aurai les deux points de la courbe pour lesquels φ atteint son maximum. A partir de là, et x croissant jusqu'à a , L diminue jusqu'à 0, il est donc facile de construire approximativement la courbe.

Occupons-nous maintenant des tangentes.

Le coefficient angulaire donné par la formule

$$\text{tang } \alpha = \varphi'(x)$$

est ici

$$\text{tang } \alpha = \frac{a}{2\sqrt{ax}} \pm \frac{a-2x}{2\sqrt{a(a-x)}}.$$

Pour $x = 0$ et $x = a$, $\text{tang } \alpha' = \infty$, ce qui prouve que les tangentes à l'origine et au point G sont l'axe des y , et sa parallèle menée par le point A.

(*) $y = \sqrt{a(a-x)}$ représente un cercle.

Si je fais

$$x = \frac{a}{2},$$

je trouve

$$\text{tang } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Donc les tangentes aux points K et K' sont parallèles, et la tangente de leur angle avec l'axe des x est donnée par la formule précédente. Il est donc facile de les construire.

On peut se proposer de chercher le point de la courbe pour lequel la tangente est parallèle à l'axe des x . Il suffit pour cela d'annuler $\text{tang } \alpha$, et on trouvera en même temps la valeur de x pour laquelle l'ordonnée correspondante est maximum.

Posons donc

$$\text{tang } \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{a}{\sqrt{ax}} = \frac{a - 2x}{\sqrt{ax - x^2}}$$

ou, en réduisant au même dénominateur et simplifiant,

$$x = \frac{3a}{4},$$

et la valeur correspondante de φ est $\frac{a}{4}\sqrt{3}$.

On prendra donc

$$OA'' = \frac{3}{4}a,$$

on élèvera par le point A'' une perpendiculaire à l'axe des x , et, à partir du point où cette perpendiculaire coupera

la parabole, on portera une longueur $= \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

La tangente au point S est parallèle à l'axe des x .

Si l'on considère la branche de courbe OKG, il est fa-

cile de voir que $\text{tang } \alpha$ reste toujours positif : il doit passer par un minimum entre $x = 0$ et $x = a$.

Ce minimum correspond à un point d'inflexion, et on l'obtiendrait en égalant à zéro la dérivée de $\text{tang } \alpha$.

On peut vérifier quelques-uns des résultats précédents par une autre méthode.

Si nous coupons la courbe par des parallèles représentées en général par

$$y = h,$$

les abscisses des points d'intersection nous seront données par l'équation du quatrième degré

$$x^4 + 2h^2 x^2 - 4h^2 ax + h^2 = 0.$$

Dans cette équation il manque un terme entre deux de même signe, ce qui nous permet d'affirmer l'existence de deux racines imaginaires. Une parallèle à l'axe des x ne coupera donc jamais la courbe plus de deux fois.

On voit aussi qu'il est des valeurs de h pour lesquelles elle ne la coupera pas du tout; car si l'équation précédente a deux racines réelles, celle que l'on obtiendra en égalant à zéro la dérivée du premier membre, aura toujours une racine réelle, mais cette racine devra donner un résultat négatif. Si on la substitue à x dans l'équation en x^4 , puisqu'une des racines de cette dernière est comprise entre $+\infty$ et celle de la dérivée, et l'autre entre celle-ci et $-\infty$, en résolvant l'inégalité on trouverait une valeur maximum pour h .

L'équation en x^4 fait voir également que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x ; car pour deux valeurs de h égales et de signes contraires, elle est identiquement la même.
