

GERONO

**Démonstration d'une proposition relative
au calcul numérique des racines de
l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, quand a est
très petit (Programme officiel)**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 436-443

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__436_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION

D'une Proposition relative au calcul numérique des racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

quand a est très-petit. (Programme officiel.)

Dans une première Note sur cette question du Programme officiel, j'ai énoncé (page 158) la proposition suivante :

Lorsque l'équation considérée

$$ax^2 + bx - c = 0$$

a des racines de signes contraires, pour que la méthode des approximations successives donne des valeurs de plus en plus approchées de la racine positive de cette équation, il faut et il suffit qu'on ait :

$$\frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2}.$$

Je vais démontrer cette proposition.

Dans l'équation *numérique*

$$ax' + bx - c = 0,$$

les lettres a , b , c représentent des nombres *positifs*; la racine positive a pour expression

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a};$$

je nommerai x' la valeur exacte de cette racine.

L'application de la méthode des approximations successives à l'équation numérique considérée consiste en un calcul que je rappelle ici.

L'équation

$$ax^2 + bx - c = 0$$

donne

$$x' = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x'^2.$$

En négligeant d'abord le terme $\frac{a}{b}x'^2$, on a, pour première valeur approchée de x' , le nombre $\frac{c}{b}$, que je désignerai par x_1 .

En remplaçant x' par le nombre x_1 dans la formule $\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x'^2$, on a, pour seconde valeur approchée de x' , le nombre $\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x_1^2$; je le désignerai par x_2 .

De même, si l'on substitue la seconde valeur approchée x_2 à x' dans la formule $\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x'^2$, il en résultera une troisième valeur approchée x_3 , et ainsi de suite.

On a donc les égalités numériques

$$x_1 = \frac{c}{b},$$

$$x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} x_1^2,$$

$$x_3 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} x_2^2,$$

$$x_4 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} x_3^2,$$

.....

$$x_{2n+1} = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} x_{2n}^2.$$

Cela posé, cherchons quelle condition doit être remplie par les coefficients a , b , c pour que x_2 approche plus de x' que x_1 .

Les relations

$$x_1 = \frac{c}{b}, \quad x' = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} x'^2$$

moutront que x_1 surpasse x' , et comme x_1 et x' sont des nombres positifs, l'inégalité

$$x_1 > x'$$

donne

$$x_1^2 > x'^2,$$

et, par suite,

$$\frac{c}{b} - \frac{a}{b} x_1^2 < \frac{c}{b} - \frac{a}{b} x'^2 \quad \text{ou} \quad x_2 < x'.$$

Ainsi, les erreurs commises en prenant pour x' , les valeurs approchées x_1 , x_2 sont exprimées par les différences

$$x_1 - x', \quad x' - x_2,$$

et, par conséquent, il faut que l'inégalité

$$x' - x_2 < x_1 - x'$$

ait lieu pour que la seconde valeur x_2 soit plus approchée de x' que la première x_1 .

Mais les relations

$$x' = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} x'^2, \quad x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} x_1^2$$

donnant

$$x' - x_2 = \frac{a}{b} (x_1^2 - x'^2) = \frac{a}{b} (x_1 + x') (x_1 - x'),$$

l'inégalité

$$x' - x_2 < x_1 - x'$$

se transforme en celle-ci :

$$\frac{a}{b} (x_1 + x') (x_1 - x') < x_1 - x',$$

et se réduit à

$$(1) \quad \frac{a}{b} (x_1 + x') < 1,$$

parce que $x_1 - x'$ est un nombre positif.

D'ailleurs

$$\begin{aligned} x_1 + x' &= \frac{c}{b} + \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} \right) \\ &= \frac{2ac - b^2 + b\sqrt{b^2 + 4ac}}{2ab}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} (x_1 + x') &= \frac{2ac - b^2 + b\sqrt{b^2 + 4ac}}{2b^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2ac}{b^2} - 1 + \sqrt{1 + \frac{4ac}{b^2}} \right), \end{aligned}$$

ou, en nommant n le rapport $\frac{ac}{b^2}$,

$$\frac{a}{b} (x_1 + x') = \frac{2n - 1 + \sqrt{1 + 4n}}{2}.$$

Donc l'inégalité (1)

$$\frac{a}{b}(x_1 + x') < 1$$

revient à

$$\frac{2n - 1 + \sqrt{1 + 4n}}{2} < 1;$$

d'où

$$\sqrt{1 + 4n} < 3 - 2n.$$

Ce qui exige que $3 - 2n$ soit positif, c'est-à-dire qu'on ait

$$n < \frac{3}{2}.$$

En admettant que cette première condition soit remplie, on pourra élever au carré les deux membres de l'inégalité

$$\sqrt{1 + 4n} < 3 - 2n,$$

et il en résultera successivement

$$1 + 4n < 9 - 12n + 4n^2,$$

$$4n^2 - 16n + 8 > 0,$$

$$n^2 - 4n + 2 > 0,$$

$$(n - 2 - \sqrt{2})(n - 2 + \sqrt{2}) > 0.$$

Or, $n < \frac{3}{2}$ donne

$$n - 2 - \sqrt{2} < 0,$$

il faut donc qu'on ait

$$n - 2 + \sqrt{2} < 0;$$

d'où

$$n < 2 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2}.$$

De ce qui précède on peut conclure que l'inégalité

$$\frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2}$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour que x_1 soit une valeur plus approchée de x' que x_1 .

Car, en supposant que les nombres a, b, c satisfassent à la condition

$$\frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2}, \quad \text{ou} \quad n < 2 - \sqrt{2},$$

on aura

$$n < 2 + \sqrt{2};$$

d'où

$$(n - 2 - \sqrt{2})(n - 2 + \sqrt{2}) > 0.$$

Et il s'ensuivra

$$(1) \quad \frac{a}{b}(x_1 + x') < 1; \quad x' - x_2 < x_1 - x'.$$

Il reste à faire voir que si l'inégalité

$$\frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2}$$

existe, tous les nombres x_1, x_2, x_3, x_4 , etc., convergeront vers x' .

Remarquons d'abord que les termes de rangs impairs x_1, x_3, x_5, \dots auront des valeurs plus grandes que x' et décroissantes, et que les termes de rangs pairs x_2, x_4, x_6, \dots auront des valeurs croissantes moindres que x' .

En effet, quels que soient a, b, c , on a

$$x_1 > x' \quad \text{et} \quad x_2 < x'.$$

En outre, si $\frac{ac}{b^2}$ est moindre que $2 - \sqrt{2}$, le nombre x_2

sera nécessairement positif. Car, en substituant $\frac{c}{b}$ à x_1 dans l'égalité

$$x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} x_1^2,$$

il vient

$$x_2 = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \left(\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{c}{b} \left(1 - \frac{ac}{b^2}\right).$$

Le facteur $1 - \frac{ac}{b^2}$ est positif, puisqu'on suppose

$$\frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2};$$

on a donc

$$x_2 > 0.$$

Alors de l'inégalité

$$x_2 < x'$$

on peut conclure

$$x_2^2 < x'^2,$$

et il en résulte

$$\frac{c}{b} - \frac{a}{b} x_2^2 > \frac{c}{b} - \frac{a}{b} x'^2 \quad \text{ou} \quad x_3 > x'.$$

On a d'ailleurs évidemment

$$x_3 < x_1.$$

L'inégalité

$$x_3 < x_1$$

donne

$$x_3^2 < x_1^2,$$

parce que x_3 et x_1 sont positifs; d'où

$$x_4 > x_2 > 0;$$

et de

$$x_4 > x'$$

on conclura

$$x_4 < x',$$

et ainsi de suite.

On voit donc que les valeurs de x_1, x_3, x_5 , etc., sont plus grandes que x' et décroissent, et que les valeurs de x_2, x_4, x_6, \dots croissent en restant moindres que x' . Ainsi, de tous les termes de la suite x_1, x_2, x_3, \dots , le plus grand est x_1 .

Il est maintenant facile de reconnaître qu'un terme quelconque x_{2n+1} a une valeur plus approchée de x' que le terme précédent x_{2n} , c'est-à-dire que

$$x_{2n+1} - x' < x' - x_{2n};$$

car

$$x_{2n+1} - x' = \frac{a}{b}(x'^2 - x_{2n}^2) = \frac{a}{b}(x' + x_{2n})(x' - x_{2n}).$$

Mais on vient de voir que x_{2n} est moindre que x_1 ; donc

$$\frac{a}{b}(x' + x_{2n}) < \frac{a}{b}(x' + x_1).$$

D'ailleurs l'inégalité supposée

$$\frac{ac}{b^2} < 2 - \sqrt{2}$$

donne

$$\frac{a}{b}(x' + x_1) < 1;$$

par conséquent, on a

$$x_{2n+1} - x' < x' - x_{2n}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

G.

