NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Équation d'une conique passant par cinq points donnés

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 418-421

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__418_1>

ÉQUATION D'UNE CONIQUE PASSANT PAR CINQ POINTS DONNÉS.

1. Soient x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4; x_5, y_5 les coordonnées des cinq points; l'équation de la conique est

$$\begin{aligned}
&[(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + x_1 y_2 - y_1 x_2]\\
&\times[(y_3 - y_4)x - (x_3 - x_4)y + y_4 x_3 - x_4 y_3]\\
&\times[(y_2 - y_3)x_5 - (x_2 - x_3)y_5 + x_2 y_3 - y_2 x_3]\\
&\times[(y_4 - y_1)x_5 - (x_4 - x_1)y_5 + x_4 y_1 - y_4 x_1]\\
&=[(y_2 - y_3)x - (x_2 - x_3)y + x_2 y_3 - y_2 x_3]\\
&\times[(y_4 - y_1)x - (x_4 - x_1)y + y_1 x_4 - x_1 y_4]\\
&\times[(y_3 - y_4)x_5 - (x_3 - x_4)y_5 + x_3 y_4 - y_3 x_4]\\
&\times[(y_1 - y_2)x_5 - (x_1 - x_2)y_5 + x_1 y_2 - y_1 x_2],
\end{aligned}$$

Il est évident qu'on satisfait à cette équation en remplaçant successivement x et y par les coordonnées des points; elle ne change pas en permutant mutuellement les indices 1 et 5, 2 et 5, 3 et 5, 4 et 5.

2. Désignons par α et γ les deux facteurs en x, y du membre à gauche; par β et δ les deux facteurs en x, y du membre à droite;

$$\alpha = 0, \quad \gamma = 0$$

sont les équations du côté opposé du quadrilatère inscrit ayant pour sommets les quatre premiers points. Si d'un point quelconque de la conique on abaisse des perpendiculaires sur les quatre côtés du quadrilatère inscrit, $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$ exprime le quotient du rectangle des perpendiculaires abaissées sur les côtés opposés α, γ divisé par le rectangle $\beta\delta$ des perpendiculaires abaissées sur les deux autres côtés, et l'équation montre que ce quotient est constant; c'est le théorème de Newton. Ainsi ce théorème établi, on peut s'en servir pour écrire tout de suite l'équation d'une conique passant par cinq points. On voit donc pourquoi Newton a pris ce théorème pour point de départ et en a déduit toutes les propriétés des coniques en y joignant le procédé métamorphique employé sous le nom d'*homographie* dans ce temps-ci.

3. Si d'un point quelconque de la conique, on mène des droites aux quatre sommets de quadrilatère inscrit, on obtient un faisceau de quatre droites et quatre triangles ayant pour bases les quatre côtés du quadrilatère; dans chaque triangle, la hauteur est égale au rectangle des côtés qui comprennent l'angle opposé à la base, divisé par la base, et le tout multiplié par le sinus de cet angle. Faisant usage de ces valeurs dans le théorème de Newton, on trouve une relation entre les sinus des angles du faisceau et qui constitue la constance du rapport anharmonique du faisceau; propriété qui est

le point de départ des admirables travaux de M. Chasles sur les coniques.

Ainsi les deux théorèmes sont des corollaires l'un de l'autre.

4. Posons

$$
\begin{aligned}
A_1 &= (y_1 - y_2)(y_3 - y_4), & C_1 &= x_1 y_2 - y_1 x_2,\\
A_2 &= (y_2 - y_3)(y_4 - y_1), & C_2 &= x_2 y_3 - y_2 x_3,\\
\alpha_1 &= (x_1 - x_2)(x_3 - x_4), & C_3 &= x_3 y_4 - y_3 x_4,\\
\alpha_2 &= (x_2 - x_3)(x_4 - x_1), & C_4 &= x_4 y_1 - y_4 x_1,\\
B_1 &= (y_1 - y_2)(x_3 - x_4), & &\\
B_2 &= (y_2 - y_3)(x_4 - x_1), & &\\
\beta_1 &= (x_1 - x_2)(y_3 - y_4), & &\\
\beta_2 &= (x_2 - x_3)(y_4 - y_1); & &
\end{aligned}
$$

on aura

$$
\begin{aligned}
\alpha\gamma = {} & A_1 x^2 - xy(B_1 + \beta_1) + \alpha_1 y^2\\
& + x[(y_3 - y_4)C_1 - (y_1 - y_2)C_3]\\
& + y[(x_1 - x_2)C_3 - (x_3 - x_4)C_1] - C_1 C_3,\\
\beta\delta = {} & A_2 x^2 - xy(B_2 + \beta_2) + \alpha_2 y^2\\
& + x[(y_4 - y_1)C_2 - (y_2 - y_3)C_4]\\
& + y[(x_2 - x_3)C_4 - (x_4 - x_1)C_2] - C_2 C_4.
\end{aligned}
$$

Désignant par α_5, β_5, γ_5, δ_5 ce que deviennent α, β, γ, δ en y remplaçant x, y par x_5, y_5, on a

$$
\begin{aligned}
\alpha_5\gamma_5 = {} & A_1 x_5^2 - x_5 y_5(B_1 + \beta_1) + \alpha_1 y_5^2\\
& + x_5[(y_3 - y_4)C_1 - (y_1 - y_2)C_3]\\
& + y_5[(x_1 - x_2)C_3 - (x_3 - x_4)C_4] - C_1 C_3,\\
\beta_5\delta_5 = {} & A_2 x_5^2 - x_5 y_5(B_2 + \beta_2) + \alpha_2 y_5^2\\
& + x_4[(y_4 - y_1)C_2 - (y_2 - y_3)C_4]\\
& + y_5[(x_2 - x_3)C_4 - (x_4 - x_1)C_2] - C_2 C_4,
\end{aligned}
$$

et l'équation de la conique est

$$\alpha\gamma\beta_5\,\delta_5 = \beta\delta\alpha_5\,\gamma_5,$$

$$\begin{aligned}
&(y_3 - y_4)\,C_1 - (y_1 + y_2)\,C_2 \\
&= y_2 y_3\,(x_1 - x_4) + y_3 y_1\,(x_4 - x_2) \\
&+ y_1 y_4\,(x_2 - x_3) + y_4 y_2\,(x_3 - x_1);
\end{aligned}$$

de même pour les valeurs analogues.

5. Si l'on prend le point x_5, y_5 pour origine, l équation devient

$$C_2 C_4\,\alpha\gamma = C_1\,C_3\,\beta\delta$$

et prend la forme

$$Mx^2 + N\,xy + P\,y^2 + \ldots = 0,$$

et l'on a, en faisant le calcul,

$$\begin{aligned}
N^2 - 4PM = {} & (C_2^2\,C_4^2 + C_1^2\,C_3^2) \\
& \times [(y_1 - y_2)(x_3 - x_4) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_4)]^2 \\
& - 2\,C_1\,C_2\,C_3\,C_4 \\
& \times [(y_1 - y_2)(x_3 - x_4) + (x_1 - x_2)(y_3 - y_4)] \\
& \times [(x_2 - x_3)(y_4 - y_1) + (y_2 - y_3)(x_4 - x_1)],
\end{aligned}$$

expression qui donne l'espèce de la courbe.