NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Astronomie sur la théorie du double mouvement des planètes de Jean Bernoulli ; d'après M. W. Hartwig

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 410-415
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__410_0>

ASTRONOMIE.

Sur la théorie du double mouvement des planètes de Jean Bernoulli ;

D'APRÈS M. W. HARTWIG.

Astr. Nach., t. XLI, n° 968; 1855.

Jean Bernoulli est le premier qui ait déduit le double mouvement de révolution et de rotation des planètes d'un choc dont la direction ne passe pas par le centre de gravité (*Opera omn.*, t. IV, p. 282 ; 1742). Il est aussi le premier qui ait donné une idée nette de l'orbite cycloïdale des molécules d'un mobile solide, et il fait observer que dans le plan qui passe par le centre de gravité et la direction de la force impulsive, le centre spontané de rotation décrit une cycloïde ordinaire ; c'est un cercle de rayon égal à la distance de ce centre au centre de gravité et qui roule sur une droite parallèle à la direction d'impulsion. Les autres points décrivent des cycloïdes *raccourcies* ou *rallongées*. Voici ses paroles :

Hoc sane futurum prævideo, ut more projectilium (a quorum gravitate abstrahitur) centrum gravitatis C *protinus incipiat moveri secundum directionem rectilineam, in qua tunc reperitur, et quidem celeritate uniformi, sicuti jam dudum demonstratum est ; atque ita, perseverante rotatione, singula relicta puncta describent curvas cycloïdales, inter quas illa quæ ab ipso puncto* B *describitur, est cycloïs ordinaria* Hugeniana, *habens pro tangente initiali ipsam* BA; *cæteræ vero omnes sunt cycloïdes vel contractæ, vel protractæ prout à puncto* C *vel plus vel minus distant quam punctum* B (p. 279).

B est le centre spontané de rotation et A est le pied de la perpendiculaire abaissée de B sur la direction de la force impulsive.

Ce sont ces mouvements que M. Poinsot a figurés par deux cônes roulant l'un sur l'autre.

Bernoulli n'a considéré parmi les planètes que la Terre, Mars, Jupiter et la Lune; Schubert, dans son *Traité d'Astronomie théorique* (t. III, 1822) a fait le même calcul en ajoutant Vénus et Saturne.

La Table suivante contient les valeurs selon M. Hartwig, Bernoulli et Schubert.

C = centre de gravité qu'on prend pour centre de la planète supposée sphérique;

B = centre d'oscillation ;

A = pied de la perpendiculaire abaissée de B sur la direction de la force impulsive.

Les distances sont exprimées en parties du demi-diamètre de chaque planète.

	HARTWIG		BERNOULLI.		SCHUBERT.	
	CA	CB	CA	CB	CA	CB
Vénus . .	$0,005243 = \frac{1}{191}$	76,3815	. . . .	. .	$0,005108 = \frac{1}{196}$	78,30329
Terre. . .	$0,006095 = \frac{1}{164}$	65,7053	$\frac{1}{105}$	60	$0,006108 = \frac{1}{164}$	65,48498
Mars. . .	$0,003796 = \frac{1}{263}$	105,509	$\frac{1}{418}$	84	$0,003806 = \frac{1}{263}$	105,09380
Jupiter .	$0,37674 = \frac{55}{146}$	1,06173	$\frac{7}{19}$	$\frac{11}{10}$	$0,364736 = \frac{9}{25}$	1,096684
Saturne	$0,38754 = \frac{112}{268}$	1,01011	. .	. .	$0,438487 = \frac{11}{25}$	1,912227

On ne découvre dans cette Table aucune marche régulière. Il n'en est pas de même en prenant une unité commune pour toutes ces planètes, par exemple le rayon de la Terre; alors on a le tableau suivant :

(A)		CB
	Vénus.....	75,3885
	La Terre...	65,7053
	Mars......	54,7589
	Jupiter....	11,9498
	Saturne ...	9,3236

On voit que CB diminue lorsque la distance au Soleil augmente. On ne connaît qu'imparfaitement la durée de la rotation de Mercure; en admettant $24^{h}\ 5^{m}$, on trouve

$$CB = 106,260,$$

ce qui s'accorde avec la règle des distances.

M. Hartwig n'a pu parvenir à une équation simple entre ces valeurs et la distance, il n'est parvenu qu'à cette relation transcendante

$$y = a + bc^{-x},$$

où x est la distance au Soleil et $y = CB$.

$$(B)\quad \begin{cases} a = \ \ 10,3406, \\ b = 109,9662, \\ c = \ \ \ 1,96393. \end{cases}$$

D'après cette formule, prenant toujours le rayon terrestre pour unité, on a

(C)		CB
	Vénus.....	77,3397
	La Terre...	66,8336
	Mars......	49,6619
	Jupiter....	13,6230
	Saturne....	10,5165

En calculant les valeurs extrêmes que peut avoir CB.

on trouve

		Maximum.	Minimum.
(D)	Venus.....	95,9075	74,8730
	La Terre ..	66,8181	69,6110
	Mars......	60,1253	49,8716
	Jupiter....	12,5398	11,3874
	Saturne....	9,86270	8,81338

Mars présente le plus grand intervalle, c'est aussi la planète qui présente la plus grande erreur dans la Table (C) ; mais cette valeur dans (C) s'accorde presque avec le minimum dans (D) ; on voit que chaque maximum est plus petit que le minimum de la valeur précédente ; si l'on voulait en tirer une conclusion pour Uranus, CB pour cette planète devrait être au-dessus de 8,81338, et, par conséquent, la durée de sa rotation moindre que 13^h 15^m : on aurait donc une limite supérieure, troisième exemple de la rotation rapide des planètes situées au delà de Mars.

Bernoulli fait déjà la remarque que le centre d'oscillation B de la Terre tombe dans le voisinage de l'orbite de la Lune.

Videmus hinc, punctum B *tam procul a Terra existere ut* BC *sit = circiter* 60 *diametris* (*) *Terræ ; atque adeo pertingat usque ad regionem Lunæ. Quod an sit inter raro contingentia numerandum, an vero ex necessitate aliqua physica, effectui Lunæ attribuendæ, consequatur de eo dispiciant physici. Fortassis reperient aliquam rationem a motu et distantia Lunæ repetendam, cur motus annuus et diurnus Terræ eam inter se habeant relationem quam habent ; ita ut aliam habere non possint* (p. 283).

(*) Lisez *semi-diametris*

Ainsi Bernoulli soupçonne qu'il existe une cause physique de cette coïncidence du centre d'oscillation de la Terre avec l'orbite lunaire. Schubert va plus loin.

Il dit : « Le phénomène le plus surprenant est celui » que présentent les centres d'oscillation de la Terre et » de la Lune. Relativement à la Lune, la distance x (CB) » est 220,9 demi-diamètres de la Lune, ce qui fait » $0,27293 \times 220,9$ ou à peu près soixante demi-diamè- » tres de la Terre. Le centre d'oscillation de la Lune » coïncide donc exactement avec le centre de la Terre; » celui de la Terre tombe un peu au delà de la Lune, » x (CB) étant soixante-cinq demi-diamètres de la Terre. » Cette harmonie frappante paraît indiquer un nouveau » lien qui réunit ces deux corps, et il est possible qu'elle » répande un nouveau jour sur cette partie de l'astrono- » mie physique. »

M. Hartwig fait observer que relativement à la Lune la coïncidence est une conséquence de ce que la durée de son mouvement de rotation est égale à celle de son mouvement de révolution autour de la Terre. En effet, soit a la distance de la Lune à la Terre, exprimée en demi-diamètres de la Lune; r le demi-diamètre de la Lune, exprimée en demi-diamètres de la Terre; π la parallaxe solaire; τ la durée du mouvement de rotation; T la durée du mouvement de révolution. On trouve

$$\mathrm{CB} = \frac{1}{\sin \pi} \frac{a}{r} \frac{\tau}{\mathrm{T}},$$

exprimée en demi-diamètres de la Lune; ou en rapportant tout au demi-diamètre de l'orbite

$$\mathrm{CB} = \frac{\tau}{\mathrm{T}}:$$

mais

$$\tau = \mathrm{T},$$

donc

$$CB = 1;$$

le centre d'oscillation de la Lune doit donc coïncider avec le centre de l'orbite qui est celui de la Terre. Si, comme il paraît vraisemblable, les durées des deux mouvements des satellites de Jupiter coïncident, il faut que le centre d'oscillation de chacun coïncide avec le centre de Jupiter. M. Poinsot fait deux objections à la théorie de Bernoulli. D'abord il est trop spécial de n'admettre qu'une seule force; ensuite cette force a dû être parallèle à l'équateur de la planète et aussi à la tangente menée à l'orbite par le lieu de la planète, et les seuls points où la tangente est parallèle au plan de l'équateur sont l'aphélie et le périhélie. Il faut donc que la planète se soit trouvée primitivement à l'un de ces points et que le choc fût perpendiculaire à la ligne des absides. On peut répondre que cela suppose que l'intersection de l'équateur avec le plan de l'orbite est perpendiculaire à la ligne des absides; rien n'oblige à admettre cette supposition, et alors le parallélisme de la tangente à l'orbite avec le plan de l'équateur peut avoir lieu hors de l'aphélie et du périhélie; quant à la force unique, rien n'empêche que l'on ne recherche quelle devait être la force unique pour produire le double mouvement observé.

Laplace semble admettre l'hypothèse de Bernoulli (*Mécanique céleste*, t. Ier, chap. VII, § 29, et *Exposition du système du monde*, livre III, chap. V).