

Questions

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16 (1857), p. 401-407

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__401_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS.

401. On projette un point d'une ellipse sur ses deux axes; démontrer que l'enveloppe de la droite qui joint les deux projections est la développée d'une ellipse.

Même question pour l'hyperbole.

402. On projette orthogonalement un point d'un ellipsoïde sur ses trois plans principaux; trouver l'enveloppe du plan qui passe par les trois points.

Même question pour les deux hyperboloïdes.

403. Ecrire l'équation d'un faisceau de surfaces qui passent par le point (x', y', z') et par l'intersection des deux surfaces

$$f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0.$$

404. Deux points matériels parcourent d'un mouvement uniforme, avec des vitesses données en grandeur et en direction, deux droites situées dans l'espace; trouver l'équation de la surface décrite par la droite variable qui passe par deux positions simultanées des points matériels.

405. Etant donnée l'équation

$$(x^3 + y^3 - z^3 - 3xyz)(x'^3 + y'^3 + z'^3 - 3x'y'z') \\ = X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ,$$

comment trouver les valeurs de X, Y, Z en fonction de x, y, z, x', y', z' . (MICHAEL ROBERTS.)

406. Soient

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0$$

les équations rendues homogènes de trois cercles, l'équa-

tion du cercle qui coupe ces trois cercles à angle droit est donnée par cette relation

$$\begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dx} & \frac{dU_1}{dy} & \frac{dU_1}{dz} \\ \frac{dU_2}{dx} & \frac{dU_2}{dy} & \frac{dU_2}{dz} \\ \frac{dU_3}{dx} & \frac{dU_3}{dy} & \frac{dU_3}{dz} \end{vmatrix} = 0.$$

(RÉV. GEORGE SALMON.)

Observation. On rend une équation homogène en remplaçant x, y par $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$, et on fait finalement $z = 1$. $\frac{dU_1}{dx}$ est la dérivée de U_1 par rapport à x ; de même $\frac{dU_1}{dy}$, etc. Les barres désignent un déterminant.

407. Etant données deux coniques dans un même plan, le lieu d'un point tel, que les quatre tangentes menées de ce point aux quatre coniques forment un faisceau harmonique est une conique. (RÉV. GEORGE SALMON.)

408. On a identiquement

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+a_1 \end{vmatrix} = a_1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2,$$

et en général

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \dots & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a_3 \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 \dots a_n,$$

409. On a identiquement

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & & \\ & 1 & 1+a_2 & \\ & & & \dots \\ & & & 1 & 1+a_3 \end{vmatrix} = a_1 + a_2 + a_1 a_2,$$

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & & 1 \\ & 1 & 1+a_2 & 1 \\ & & & \dots \\ & & & 1 & 1 & 1+a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_1 a_2 a_3,$$

et en général

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ & 1 & 1+a_2 & \dots & 1 \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} \\ = a_2 a_3 \dots a_n + a_1 a_3 \dots a_n + \dots + a_1 a_2 a_3 \dots a_n.$$

410. Si l'on désigne par D le déterminant

$$\begin{vmatrix} \cos n \alpha_0 & \cos (n-1) \alpha_0 & \cos (n-2) \alpha_0 \dots & \cos 0 \alpha_0 \\ \cos n \alpha_1 & \cos (n-1) \alpha_1 & \cos (n-2) \alpha_1 \dots & \cos 0 \alpha_1 \\ \cos n \alpha_2 & \cos (n-1) \alpha_2 & \cos (n-2) \alpha_2 \dots & \cos 0 \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos n \alpha_n & \cos (n-1) \alpha_n & \cos (n-2) \alpha_n \dots & \cos 0 \alpha_n \end{vmatrix}$$

et par D_1 le déterminant

$$\begin{vmatrix} \cos^n \alpha_0 & \cos^{n-1} \alpha_0 & \cos^{n-2} \alpha_0 \dots & \cos^0 \alpha_0 \\ \cos^n \alpha_1 & \cos^{n-1} \alpha_1 & \cos^{n-2} \alpha_1 \dots & \cos^0 \alpha_1 \\ \cos^n \alpha_2 & \cos^{n-1} \alpha_2 & \cos^{n-2} \alpha_2 \dots & \cos^0 \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos^n \alpha_n & \cos^{n-1} \alpha_n & \cos^{n-2} \alpha_n \dots & \cos^0 \alpha_n \end{vmatrix}$$

on aura

$$D = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} D_1.$$

(PROUHEZ.)

411. Si l'on désigne par D_2 le déterminant

$$\begin{vmatrix} \sin(n+1)\alpha_0 & \sin n\alpha_0 & \dots & \sin \alpha_0 \\ \sin(n+1)\alpha_1 & \sin n\alpha_1 & \dots & \sin \alpha_1 \\ \sin(n+1)\alpha_2 & \sin n\alpha_2 & \dots & \sin \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(n+1)\alpha_n & \sin n\alpha_n & \dots & \sin \alpha_n \end{vmatrix}$$

on aura

$$D_2 = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \sin \alpha_0 \sin \alpha_1 \dots \sin \alpha_n D_1.$$

(PROUBET.)

412. En adoptant la notation bien commode de M. Cayley, posons l'équation

$$(a, b, c, d, e, f, g, \dots)(x, 1)^n = 0$$

dont les racines sont $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Démontrer les formules suivantes

$$\begin{aligned} 2a^4 \Sigma (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 &= n^2(n-1)(n-2) \\ &\times \left\{ n^2(b^2 - ac)^2 + \frac{n-3}{6} a^2(ac - 4bd + 3c^2) \right\}, \\ 6a^6 \Sigma (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_1 - x_4)^2 &= n^2(n-1)(n-2) \\ &\times \left\{ \begin{aligned} &n^4(n-3)(b^2 - ac)^3 + \frac{n^2}{2}(n^2 - 5n + 8)a^2(b^2 - ac) \\ &\times (ac - 4bd + 3c^2) \\ &-\frac{n}{2}(7n - 15)a^3(ad^2 + cb^2 + c^3 - 2bed - ace) \\ &-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)a^4}{6a} \\ &\times (ag + 15ec - 10d^2 - 6bf). \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Il est très-digne de remarque que la quantité

$$\bullet \quad ag + 15ec - 10d^2 - 6bf$$

est un invariant pour les fonctions homogènes à deux variables du sixième degré.

(MICHAEL ROBERTS.)

Note du Rédacteur. La fonction homogène à deux variables de degré n peut évidemment s'écrire sous la forme

$$a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} a_2 x^{n-2} y^2 \\ + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_3 x^3 y^3 + \dots + n a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n = F.$$

C'est cette forme que M. Cayley représente d'une manière si expressive et si mnémorique par

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) (x, y)^n.$$

Si l'on fait

$$y = 1,$$

on a une expression à une variable; le révérend M. Roberts a remplacé a_0, a_1, a_2 , etc., par a, b, c, d .

Covariants et invariants.

Si dans la fonction F on remplace x par $\lambda x + \mu y$ et y par $\lambda' x + \mu' y$, il est clair que la fonction garde encore la forme

$$(a'_0, a'_1, a'_2, \dots, a'_n) (x, y)^n,$$

où les a' sont des fonctions des a et des quatre constantes $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$.

Soient

$$\varphi(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, x, y)$$

une fonction quelconque des a et de x, y , et

$$\varphi(a'_0, a'_1, a'_2, \dots, a'_n, x, y)$$

la fonction analogue en a' et x, y ; mais les a' étant des

fonctions des a , il s'ensuit que cette dernière fonction est aussi une fonction des a . Si la fonction φ est prise de telle manière que l'on ait l'identité

$$\begin{aligned} & \varphi(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, x, y) \\ &= (\lambda\mu' - \lambda'\mu)^p \varphi(a'_0, a'_1, a'_2, \dots, a'_n, x, y), \end{aligned}$$

où p est un nombre entier positif, alors la fonction φ est dite *covariant* de F . Si l'on avait simplement la fonction

$$\varphi(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$$

sans x et sans y et qu'on ait l'identité

$$\varphi(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)^p \varphi(a'_0, a'_1, a'_2, \dots, a'_n),$$

alors φ est un *invariant* de la fonction F .

Exemple. Soit

$$n = 3,$$

$$F = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3.$$

$$\lambda = 1, \quad \lambda_1 = 0, \quad \mu_1 = 1;$$

on trouve

$$a'_0 = a_0,$$

$$a'_1 = a_1 + a_0 \mu,$$

$$a'_2 = a_2 + 2 a_1 \mu + a_0 \mu^2,$$

$$a'_3 = a_3 + 3 a_2 \mu + 3 a_1 \mu^2 + a_0 \mu^3.$$

Prenons

$$\varphi = (a_1^2 - a_0 a_2) x^2 + (a_1 a_2 - a_0 a_3) xy + (a_2^2 - a_1 a_3) y^2;$$

désignons par Φ la fonction analogue en a' ; si l'on y remplace ensuite les a' par leurs valeurs en a , on trouve

$$p = 0, \quad \text{et} \quad \varphi = \Phi.$$

Cette fonction φ jouit donc de la propriété qui la rend un *covariant* de F .

Soit

$$n = 2,$$

alors

$$F = a_0 x^2 + 2 a_1 xy + a_2 y^2;$$

alors

$$a'_0 = a_0 \lambda^2 + 2 a_1 \lambda \lambda' + a_2 \lambda'^2,$$

$$a'_1 = a_0 \lambda \mu + a_1 (\lambda \mu' + \lambda' \mu) + a_2 \lambda' \mu',$$

$$a'_2 = a_0 \mu^2 + 2 a_1 \mu \mu' + a_2 \mu'^2.$$

Prenons

$$\varphi = a_1^2 - a_0 a_2,$$

sans x, y ; alors

$$\Phi = a_1'^2 - a_0' a_2',$$

et remplaçant les a' par leurs valeurs en a , on trouve

$$\Phi = (\lambda \mu' - \mu \lambda')^2 \varphi,$$

et φ est un *invariant* de F ; si

$$\lambda \mu' - \mu \lambda' = 1;$$

alors

$$\Phi = \varphi$$

(voir la Note de M. Combescure, p. 193 de la *Théorie des déterminants*).
