Résolution en nombres entiers de l'équation $a^x - b^y = 1$, a et b étant des nombres premiers

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 394-398

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__394_1>

RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DE L'ÉQUATION

$$a^x - b^y = 1,$$

a et *b* étant des nombres premiers.

Je distingue ces deux cas : $a = 2$, $a > 2$.

1°. $a = 2$. L'équation à résoudre est

$$2^x - b^y = 1.$$

On en tire successivement :

$$2(2^{x-1} - 1) = b^y - 1 = (b - 1)(b^{y-1} + b^{y-2} + \ldots + b + 1);$$

$$2^{x-1} - 1 = \frac{b-1}{2}(b^{y-1} + b^{y-2} + \ldots + b + 1).$$

Cette dernière équation montre que

$$b^{y-1} + b^{y-2} + \ldots + b + 1$$

doit être un nombre impair. Et comme le nombre des termes de

$$b^{y-1} + b^{y-2} + \ldots + b + 1$$

est y et qu'en outre le nombre premier b est impair, il faut que y soit aussi un nombre impair. Il en résulte que $b^y + 1$ est exactement divisible par $b + 1$: mais

$$b^y + 1 = 2^x;$$

donc 2^x est divisible par $b + 1$, ce qui exige que $b + 1$ soit une puissance de 2, c'est-à-dire que le nombre premier b ait la forme $2^n - 1$.

En divisant par $b + 1$ les deux membres de l'équation proposée

$$b^y + 1 = 2^x,$$

elle se transforme en celle-ci :

$$b^{y-1} - b^{y-2} + b^{y-3} - \ldots + b^2 - b + 1$$
$$= \frac{2^x}{b+1} = \frac{2^x}{2^n} = 2^{x-n}.$$

Or $b^{y-1} - b^{y-2} + b^{y-3} + \ldots + b^2 - b + 1$ est nécessairement un nombre impair, puisque b et y sont impairs ; donc il faut qu'on ait

$$2^{x-n} = 1,$$

d'où

$$x = n,$$

et, par suite,

$$y = 1.$$

De ce qui précède, nous concluons que l'équation proposée

$$2^x - b^y = 1$$

n'a aucune solution entière si le nombre premier b n'a pas la forme $2^n - 1$, et que si b a cette forme, l'équation admet une solution entière et une seule qui est

$$x = n, \quad y = 1.$$

2°. $a > 2$. L'équation

$$a^x - b^y = 1$$

donne

$$a^x - 1 = b^y :$$

mais $a^x - 1$ est un nombre pair ; donc

$$b = 2.$$

D'ailleurs b^y est exactement divisible par $a - 1$; par conséquent $(a - 1)$ est une puissance de 2, c'est-à-dire que le nombre premier a doit avoir la forme $2^n + 1$. Ces deux conditions étant supposées remplies, l'équation proposée devient

$$(2^n + 1)^x - 2^y = 1 ;$$

elle est vérifiée par

$$x = 1, \quad y = n ;$$

il reste à examiner si elle peut avoir d'autres solutions entières.

Supposons que l'équation

$$(2^n + 1)^x - 2^y = 1$$

ou

$$(2^n + 1)^x - 1 = 2^y$$

puisse admettre une solution entière dans laquelle on ait $x > 1$, la valeur correspondante de y sera évidemment plus grande que n, et en divisant par $(2^n + 1) - 1$ les deux membres de

$$(2^n + 1)^x - 1 = 2^y,$$

il en résultera cette nouvelle équation

$$(2^n + 1)^{x-1} + (2^n + 1)^{x-2} + \ldots + (2^n + 1) + 1 = \frac{2^y}{2^n} = 2^{y-n},$$

dont le second membre sera un nombre pair. Il en sera de même du premier, et il faudra que x soit aussi un nombre pair. Dans ce cas, $(2n+1)^x - 1$ est exactement divisible par $(2^n+1)+1$ ou $2(2^{n-1}+1)$. Donc $2^{n-1}+1$ devra diviser 2^y, ce qui entraîne la condition $n=1$. En supposant qu'elle soit remplie, l'équation proposée devient

$$3^x - 1 = 2^y \quad \text{ou} \quad 2^y + 1 = 3^x.$$

On voit que y doit être impair, puisque 2^y+1 admet le diviseur 3 ou $2+1$. En effectuant la division des deux membres par $2+1$, on a

$$2^{y-1} - 2^{y-2} + 2^{y-3} - 2^{y-4} + \ldots + 2^2 - 2 + 1 = 3^{x-1},$$

d'où

$$(2^{y-1}-1) - (2^{y-2}+1) + (2^{y-3}-1) - \ldots + (2^2-1)$$
$$- (2+1) + y = 3^{x-1}.$$

Mais les différences

$$(2^{y-1}-1),\ (2^{y-2}+1),\ (2^{y-3}-1),\ldots$$

sont des multiples de 3, donc y est multiple de 3; et comme x est pair, on pourra poser

$$y = 3y', \quad x = 2x'\ (*):$$

il s'ensuivra

$$3^{2x'} - 1 = 2^{3y'} \quad \text{ou} \quad 9^{x'} - 1 = 8^{y'}.$$

Cette dernière équation n'admet que la solution entière

$$x' = 1, \quad y' = 1.$$

En effet, x' ne peut être un nombre pair, puisque $8^{y'}$

(*) En général, dans l'équation

$$(a+1)^x - a^y = 1,$$

l'inconnue x ne peut admettre pour valeur entière, différente de l'unité, qu'un multiple de a, et toute valeur entière de y plus grande que l'unité est nécessairement multiple de $a+1$.

n'est pas divisible par $9+1$ ou 10. Il est de même impossible que x' soit un nombre impair plus grand que l'unité. Car, si cela était, y' sera aussi plus grand que l'unité, et en divisant par 8 les deux membres de $9^{x'}-1=8^{y'}$, on aurait

$$9^{x'-1}+9^{x'-2}+\ldots+9+1=8^{y'-1}.$$

égalité qui exprime qu'un nombre impair

$$9^{x'-1}+9^{x'-2}+\ldots+9+1$$

est un multiple de 8. Donc la seule valeur entière que x' puisse avoir est

$$x'=1,$$

d'où

$$y'=1, \quad x=2, \quad y=3.$$

Au résumé, lorsque le nombre premier a est plus grand que 2, il faut pour que l'équation

$$a^x-b^y=1$$

ait une solution entière, que $b=2$, et qu'en outre a soit de la forme 2^n+1. Quand ces deux conditions sont remplies, l'équation admettra la solution entière

$$x=1, \quad y=n;$$

et elle n'en aura pas d'autre si n est différent de l'unité. Mais si $n=1$, l'équation admettra les deux solutions

$$x=1, \quad y=1 \quad \text{et} \quad x=2, \quad y=3.$$