P. CHALLIOT

Solution de la question 319

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 385-388

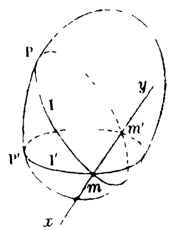
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__385_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 319

(voir tome XV, page 52);

PAR M. P. CHALLIOT,
Élève au lycée de Versailles (classe de M. Vannson).

Deux plans P et P′ coupent une surface suivant deux courbes I et I′; la projection de la courbe I sur le plan P′



sera tangente à la courbe I′ au point où la trace de P sur P′ pourra couper I′, si les coordonnées de ces points satisfont à l'équation

$$D_z . F = 0$$

déduite de l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

de la surface par rapport à trois axes rectangulaires dont deux, ceux sur lesquels on compte les x et les y, doivent être dirigés dans le plan P′.

La condition

$$D_z . F = 0,$$

nécessaire et suffisante pour que le contact dont il s'agit ait lieu, est remplie pour les surfaces du deuxième ordre quand P′ est un plan principal. (DIEU.)

Soit

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface.

Je prends le plan P' pour plan des x, y.

L'équation de la courbe I' s'obtiendra en faisant $z = 0$ dans l'équation de la surface

$$F(x, y) = 0.$$

Soient x', y', o les coordonnées d'un des points m, où la trace xy du plan P sur le plan P' coupe la courbe I'. Le coefficient angulaire de la tangente à la courbe I' au point m sera

$$\alpha = -\frac{F'_x(x', y')}{F'_y(x', y')}.$$

Soit

$$z = mx + ny + p$$

l'équation du plan P. L'équation de la projection de la courbe I sur le plan P' s'obtiendra par l'élimination de z entre les deux équations

$$F(x, y, z) = 0, \qquad z = mx + ny + p.$$

Pour avoir le coefficient angulaire de la tangente à cette projection au point m, appliquons le théorème des fonctions implicites, on aura

$$\alpha' = -\frac{F'_x(x', y') + mF'_z(x', y', 0)}{F'_y(x', y') + nF'_z(x', y', 0)}.$$

Comme par hypothèse

$$F'_z(x', y', 0) = 0,$$

il s'ensuit que $\alpha = \alpha'$. Les deux tangentes ayant un point commun et même coefficient angulaire, coïncident.

Je dis en second lieu que la condition

$$F'_z = 0$$

est remplie pour les surfaces du deuxième ordre quand P' est un plan principal.

Je rapporte la surface à ce plan et à une droite qui lui soit perpendiculaire. L'équation ne devra pas contenir de termes en z, première puissance. Elle sera de la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2Cx + 2C'y + F = 0.$$

Prenant la dérivée par rapport à z, j'aurai

$$F'_z = 2A''z,$$

et comme le point de contact en question est dans le plan des x, y, on a

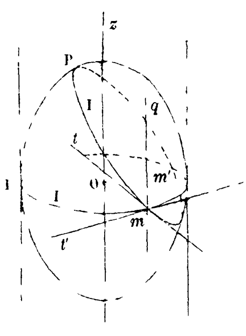
$$z' = 0,$$

donc

$$F'_z = 0.$$

Le théorème précédent peut se vérifier géométriquement pour les surfaces du second ordre.

Si par les différents points de la section principale $P'mm'$, on mène des parallèles à l'axe des z, ces droites



seront perpendiculaires au plan P'. Toutes ces parallèles forment une surface cylindrique tangente à la surface du deuxième ordre. Si par la génératrice mq on fait passer un plan tangent à la surface cylindrique, il le sera en même temps à la surface proposée. Ce plan coupe le plan P' suivant une tangente mt' à la courbe I', et le plan P suivant mt tangente à I. Or la projection de cette dernière tangente est tangente à la projection de I, et comme mt est dans un plan qmt' perpendiculaire au plan P', elle se projette suivant la trace mt'.