

GUSTAVE MICHAUX  
**Solution de la question 390**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 16  
(1857), p. 380-384

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1857\\_1\\_16\\_\\_380\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__380_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---



---

**SOLUTION DE LA QUESTION 390**

(voir p 184),

PAR M. GUSTAVE MICHAUX,

Elevé du lycée Charlemagne (classe de M. Rouche).

Soit AEFD un rectangle; de F on abaisse une perpendiculaire FG sur la diagonale DE; par G on mène une parallèle au côté EF rencontrant le côté AE en C et une parallèle GB au côté DF rencontrant AD en B. Faisons

$$EF = m, \quad DF = n, \quad DE = d, \quad EG = h,$$

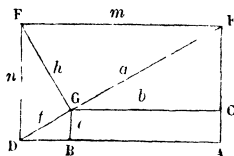
$$CG = b, \quad BG = c, \quad DG = f, \quad EG = g,$$

on a

$$h^3 = bcd, \quad d^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}}, \quad d^2 - b^2 - c^2 = 3fg.$$

(H. MONTUCCI, professeur au lycée Saint-Louis.)

Il est d'abord facile de voir que les divers triangles de la figure sont tous semblables. En effet les deux triangles



DFG, EFG sont déjà semblables au triangle DFE, puisque la ligne  $FG = h$  est une perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse. D'un autre côté, le triangle GCE est aussi semblable au triangle DEA, et par suite à son égal DFE, car GC est parallèle à DA : de même le triangle DGB est semblable au triangle DFA, à cause du parallélisme des droites GB, EA. On voit en outre que tous ces triangles sont rectangles.

Cela posé, il est aisé de démontrer les trois relations en question.

1°.  $h^3 = bcd.$

Le triangle DFE donne la relation connue

$$h^2 = fg.$$

On en déduit, en multipliant les deux membres par  $h$ ,

$$h^3 = fgh.$$

Or les triangles semblables GEC, DEA donnent

$$\frac{g}{b} = \frac{d}{m},$$

d'où

$$g = \frac{bd}{m},$$

et, en remplaçant,

$$h^3 = bd \frac{fh}{m}.$$

Enfin, de la similitude des triangles DBG, FGE résulte l'égalité

$$\frac{c}{f} = \frac{h}{m},$$

d'où

$$c = \frac{fh}{m}.$$

La relation

$$h^3 = bd \frac{fh}{m}$$

se réduit ainsi à

$$h^3 = bcd.$$

C. Q. F. D

2°.  $d^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}}.$

L'égalité

$$\frac{g}{b} = \frac{d}{m},$$

établie précédemment, donne

$$d = \frac{mg}{b},$$

d'où

$$d^2 = \frac{m^2 g^2}{b^2}.$$

De la similitude des triangles GEC, GEF résulte aussi l'égalité

$$\frac{b}{g} = \frac{g}{m},$$

d'où

$$g^2 = mb.$$

Remplaçant  $g^2$  par cette valeur dans l'expression de  $x^2$ , il vient

$$d^2 = \frac{m^3 b}{b^2} = \frac{m^3}{b}.$$

On aurait de même, à cause de la similitude des triangles DBG, DEA.

$$\frac{d}{f} = \frac{n}{c},$$

d'où

$$d = \frac{nf}{c} \quad \text{et} \quad d^2 = \frac{n^2 f^2}{c^2};$$

ou bien, à cause de la relation

$$\frac{c}{f} = \frac{f}{n}$$

(qui résulte de la similitude des triangles DBG, DFG).

$$d^2 = \frac{n^3 c}{c^2} = \frac{n^3}{c}.$$

Donc

$$\frac{m^3}{b} = \frac{n^3}{c},$$

d'où, en extrayant la racine cubique des deux membres,

$$\frac{m}{\sqrt[3]{b}} = \frac{n}{\sqrt[3]{c}};$$

et enfin, en élevant au carré les deux membres,

$$\frac{m^2}{\sqrt[3]{b^2}} = \frac{n^2}{\sqrt[3]{c^2}}.$$

On déduit de là

$$\sqrt[3]{c^2} = \sqrt[3]{b^2} \cdot \frac{n^2}{m^2};$$

de sorte que le binôme

$$\sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2}$$

peut s'écrire sous la forme

$$\sqrt[3]{b^2} + \frac{n^2}{m^2} \sqrt[3]{b^2}$$

ou

$$\sqrt[3]{b^2} \left( 1 + \frac{n^2}{m^2} \right) = \sqrt[3]{b^2} \left( \frac{m^2 + n^2}{n^2} \right) = \sqrt[3]{b^2} \frac{d^2}{m^2},$$

car

$$d^2 = m^2 + n^2.$$

Mais

$$d^2 = \frac{m^3}{b};$$

donc

$$\sqrt[3]{b^2} \frac{d^2}{m^2} = \sqrt[3]{b^2} \frac{m^3}{bm^2} = \sqrt[3]{b^2} \frac{m}{b} = \sqrt[3]{\frac{bm^3}{b^2}} = \sqrt[3]{\frac{m^3}{b}} = \sqrt[3]{d^2}.$$

Donc enfin

$$\sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} = \sqrt[3]{d^2}$$

ou bien

$$d^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}}.$$

$$5^o. d^2 - b^2 - c^2 = 3fg.$$

On a, d'après le théorème de Pythagore, les trois équations

$$d^2 = m^2 + n^2,$$

$$b^2 = g^2 - (n - c)^2 = g^2 - (n^2 + c^2 - 2nc),$$

$$c^2 = f^2 - (m - b)^2 = f^2 - (m^2 + b^2 - 2mb).$$

Retranchant membre à membre les deux dernières équations de la première, il vient

$$\begin{aligned} d^2 - b^2 - c^2 &= m^2 + n^2 - g^2 + n^2 + c^2 - 2nc - f^2 \\ &\quad + m^2 + b^2 - 2mb; \end{aligned}$$

d'ailleurs

$$d = f + g,$$

donc

$$f^2 + g^2 = d^2 - 2fg,$$

ou, en remplaçant,

$$d^2 - b^2 - c^2 = 2m^2 + 2n^2 - d^2 + 2fg + b^2 + c^2 - 2nc - 2nb,$$

ce qui donne, toutes réductions faites,

$$d^2 - b^2 - c^2 = m^2 + n^2 - mb - nc + fg.$$

Mais nous avons vu plus haut que

$$mb = g^2, \quad nb = f^2;$$

donc

$$m^2 - mb = m^2 - g^2 = h^2, \quad n^2 - nc = n^2 - f^2 = h^2,$$

et comme  $h^2 = fg$ , il vient enfin

$$d^2 - b^2 - c^2 = 3fg.$$

C. Q. F. D.