

J.-CH. DUPAIN

**Compositions pour l'École polytechnique en
1857. Solution d'une équation transcendante**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 376-379

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__376_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

COMPOSITIONS POUR L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1857.

Solution d'une équation transcendante ;

PAR M. J.-CH. DUPAIN,

Professeur à Carcassonne.

$$x = A \sin x + B.$$

Cette équation a pour racines les abscisses des intersections de la ligne droite

$$(1) \quad A y = x - B$$

et de la sinusoïde

$$(2) \quad y = \sin x.$$

On dessinera une fois pour toutes la ligne (2) qui est bien connue, et quand les coefficients A, B seront donnés,

on tracera la droite (1); les intersections sont en général nettement indiquées, et si elles ne l'étaient pas pour deux points voisins, on construirait sur une échelle plus grande l'arc de courbe qui contient ces points. Ayant ainsi obtenu une première valeur de chaque racine, on appliquera les méthodes connues d'approximation.

Discussion. Nous laissons de côté le cas tout exceptionnel où $A = \infty$, $B = \infty$, $\frac{A}{B} = -\alpha$; l'équation se réduit alors à

$$\sin x - \alpha = 0.$$

En appelant x' le plus petit arc positif dont le sinus est α , les solutions en nombre infini sont comprises dans les formules

$$2k\pi + x', \quad (2k + 1)\pi - x'.$$

Nous laissons encore de côté l'hypothèse $A = 0$ que donnerait $x = B$.

Si A était négatif, nous poserions

$$A = -A', \quad B = B' + \pi, \quad x = x' + \pi;$$

l'équation proposée devient

$$x = A' \sin x' + B',$$

de sorte que nous n'avons à considérer que des valeurs finies et positives de A .

Premier cas. $A < 1$. Le coefficient angulaire de la droite (1) est plus grand que 1; il n'y a qu'une racine.

Je pose

$$B = k\pi + \alpha;$$

k étant un nombre entier positif ou négatif, α étant compris entre 0 et π , et

$$F(x) = x - A \sin x - B.$$

En substituant $k\pi$ et $(k + 1)\pi$ dans $F(x)$, on trouve des résultats de signes contraires; l'unique racine est

donc comprise ainsi que B entre $k\pi$ et $(k+1)\pi$. B sera une première valeur approchée. On appliquera ensuite la méthode de Newton ou celle des approximations successives qui réussit ici :

$$\begin{aligned}x_1 &= A \sin B + B, \\x_2 &= A \sin x_1 + B, \\&\dots\end{aligned}$$

Si l'on porte la valeur de x_1 dans x_2 , on trouve

$$x_2 = A \sin (A \sin B + B) + B.$$

On développe le sinus et on introduit $\sin (A \sin B)$ et $\cos (A \sin B)$ que l'on remplace par les premiers termes de leur valeur en séries, réductions faites, en négligeant les puissances de A supérieures à la seconde on obtient

$$x = B + A \sin B + \frac{1}{2} A^2 \sin^2 B.$$

Voyez d'ailleurs l'*Algèbre* de M. Bertrand, 2^e édition, page 404 et la *Mécanique* de M. Duhamel, 2^e édition, tome II, page 66.

Deuxième cas. $A = 1$. Si de plus $B = k\pi$, il y a une racine triple $x = B$.

En général, il y a une racine unique comprise entre $B - 1$ et $B + 1$,

Troisième cas. $A > 1$. x est compris entre $A + B$ et $-A + B$; des considérations géométriques simples montrent que :

- 1^o. Le nombre de racines est impair ;
- 2^o. La courbe (2) est formée de parties qui se reproduisent et que j'appelle *arcs périodiques* ;
- 3^o. Chaque arc périodique complet ne peut renfermer que deux intersections situées sur le même demi-axe, lorsque la droite (1) ne coupe pas l'axe des x entre les extrémités de l'arc périodique :

4°. L'arc périodique complet entre les extrémités duquel la droite (1) coupe l'axe des x renferme trois intersections;

5°. Si dans chaque demi-axe périodique contenant deux intersections on mène une tangente parallèle à la droite (1), le point de contact dont l'abscisse satisfait à l'équation

$$A \cos x = 1$$

sépare les deux intersections.

Les racines seront donc facilement séparées et comptées.

Dans le cas particulier où $B = k\pi$, l'une des racines est B ; les autres, prises deux à deux, ont B pour moyenne arithmétique.

Application numérique.

$$x = 3,142 \sin x + 1,57.$$

On peut encore écrire

$$x = \pi \sin x + \frac{\pi}{2}.$$

Il y a une racine positive comprise $\frac{\pi}{2}$ et π , une racine négative égale à $-\frac{\pi}{2}$ et une autre racine négative comprise entre 0 et l'arc qui a pour cosinus 0,3183, c'est-à-dire $71^{\circ} 27'$.

La construction graphique montre que la racine positive est environ 2,7 ou en degrés 157° .

Les deux racines négatives ont sensiblement pour moyenne arithmétique l'abscisse du point de contact de la tangente qui les sépare ou $71^{\circ} 27'$. L'une des racines étant 90 degrés, l'autre sera sensiblement $52^{\circ} 54'$.

Il reste à traduire ces arcs en nombre, à appliquer la méthode de Newton et à vérifier le résultat, opérations faciles sur lesquelles nous n'insistons pas.