Louis Boyer

Solution de la question 372

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 371-375
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__371_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 572

(voir p. 178),

PAR M. LOUIS BOYER,
Lieutenant d'artillerie.

Un triangle ayant pour sommets les deux foyers d'une conique et le troisième sommet sur la circonférence de la conique, trouver les lieux géométriques des trois points suivants : le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité, le point de rencontre des trois hauteurs, et déterminer le degré de l'enveloppe de la droite qui joint ces trois points.

Soient O le centre de la conique pris pour origine des coordonnées et ayant deux foyers F et F', M le sommet d'un des triangles, α et β ses coordonnées.

Le premier lieu géométrique est l'axe des y, le centre du cercle circonscrit étant toujours sur cet axe.

Le second lieu est le lieu des points

$$y = \frac{\beta}{3}, \quad x = \frac{\alpha}{3},$$

donc l'équation de ce lieu est

$$9Ay^2 + 9Bx^2 = C,$$

$$Ay^2 + Bx^2 = C$$

étant l'équation de la conique : c'est donc une conique semblable à la première, ces deux coniques ayant pour centre de similitude l'origine des coordonnées.

Le point de rencontre des hauteurs est donné par les équations des droites MP perpendiculaire à FF' et F'K perpendiculaire à MF. Ces équations sont

$$x = \alpha, \quad y = -\frac{\alpha - c}{\beta}(x + c),$$

d'où

$$x = \alpha, \quad y = \frac{c^2 - \alpha^2}{\beta}.$$

L'équation du lieu sera donc

$$y^2 = \frac{A(c^2 - x^2)^2}{C - Bx^2}$$

1°. *Ellipse.*

$$y^2 = \frac{a^2(c^2 - x^2)^2}{b^2(a^2 - x^2)},$$

équation de deux courbes symétriques ayant leurs sommets sur l'axe des y aux points $y = \pm \frac{c^2}{b}$, passant toutes deux par les foyers et ayant toutes deux pour asymptotes les droites $x = \pm a$.

2°. *Hyperbole.*

$$y^2 = \frac{a^2 (c^2 - x^2)^2}{b^2 (x^2 - a^2)},$$

équation représentant un système de deux lignes hyperboliques ayant chacune une branche imaginaire et pour équations

$$y = \pm \frac{a (c^2 - x^2)}{b \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

La première ligne hyperbolique

$$y = + \frac{a (c^2 - x^2)}{b \sqrt{x^2 - a^2}}$$

a pour asymptotes les droites

$$x = a, \quad y = - \frac{a}{b} x$$

(perpendiculaire à l'une des asymptotes de l'hyperbole donnée), passe par le foyer F, et se trouve alors située au-dessous de l'axe des x, pour les valeurs de x comprises entre a et c, y est positif. L'autre branche est imaginaire.

La deuxième ligne hyperbolique a pour asymptotes les droites

$$x = - a, \quad y = \frac{a}{b} x,$$

passe par le foyer F'', se trouve au-dessous de l'axe des x pour les valeurs de x comprises entre $- a$ et $- c$, et au-dessus pour toutes les autres valeurs. L'autre branche est imaginaire.

Recherche de l'enveloppe. Elle est représentée par les trois équations suivantes, l'équation de la droite, la dérivée de cette équation et l'équation de relation entre α et β ; ces équations simplifiées prennent la forme suivante :

$$(1)\qquad [2\alpha y + (x-\alpha)\beta] = (\alpha^2 - c^2)(\alpha - 3x),$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &2y(A\beta^2 - B\alpha^2) + 2x\alpha\beta(3A - B)\\ &= [A\beta^2 + (3A - 2B)\alpha^2 - Ac^2]\beta, \end{aligned}\right.$$

$$(3)\qquad C - B\alpha^2 = A\beta^2.$$

Multipliant (1) et (3) membre à membre, on obtient

$$(4)\qquad \beta = \frac{(C - B\alpha^2)\,2y\alpha}{A(\alpha^2 - c^2)(\alpha - 3x) - (C - B\alpha^2)(x - \alpha)}.$$

Remplaçant $A\beta^2$ par sa valeur dans l'équation (2), on a aussi

$$(5)\qquad \beta = \frac{2y(C - 2B\alpha^2)}{3(A - B)\alpha^2 - 2(3A - B)x\alpha + C - Ac^2}.$$

En égalant les valeurs (4) et (5) de β et remplaçant β par sa valeur (4) dans l'équation (3), on a les deux équations suivantes entre α, x, y :

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &B(A - B)\alpha^5 + [ABc^2 - (2A - B)C]\alpha^3\\ &- [6ABc^2 - C(3A + B)]x\alpha^2 + C(3Ac^2 - C)x = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &4Ay^2(C - 2B\alpha^2)^2\\ &= (C - B\alpha^2)[3(A - B)\alpha^2 - 2(3A - B)x\alpha + C - Ac^2]^2. \end{aligned}\right.$$

D'où l'on déduit les deux équations

$$(8)\qquad x = \frac{P\alpha^5 + Q\alpha^3}{R\alpha^2 - S},$$

$$(9)\qquad y^2 = \frac{(C - B\alpha^2)[3(A - B)\alpha^2 - 2(3A - B)x\alpha + C - Ac^2]^2}{4A(C - 2B\alpha^2)^2}.$$

Chaque valeur de α donnera une valeur pour x et deux valeurs égales et de signe contraire pour y ; la courbe est donc de degré pair et symétrique relativement à l'axe des x. De plus, pour que x ait une valeur déterminée, α nous sera donné par une équation du cinquième degré, aura donc cinq valeurs : de sorte que pour une valeur de x, y pourra donc avoir dix valeurs différentes. Mais si l'on remplace x par sa valeur (8) dans l'équation (9), on verra qu'une valeur positive ou négative de y pourra être donnée par quatorze valeurs de α, car alors l'équation (9) sera du quatorzième degré en α. Donc pour quatorze valeurs de α, et de x par conséquent, y pourra avoir deux valeurs égales et de signe contraire, ce qui peut faire vingt-huit valeurs différentes : l'équation de l'enveloppe peut donc être considérée comme étant du vingt-huitième degré.