

SACCHI

**Seconde solution de la question 389  
(Lagrange) et première de la question 290**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 16  
(1857), p. 369-371

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1857\\_1\\_16\\_\\_369\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__369_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---



---

**SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 389 (LAGRANGE)  
ET PREMIÈRE DE LA QUESTION 290**

(voir page 296).

PAR M. LE DOCTEUR SACCHI,  
De l'université de Pavie.

---

Si l'on représente par  $A_x^{(r)}$  le coefficient de  $k^x$  dans le développement de  $(1+k)^r$ , on aura

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1+k)^r = A_0^{(r)} + A_1^{(r)} k + \dots \\ \quad \quad \quad + A_{x-1}^{(r)} k^{x-1} + A_x^{(r)} k^x + \dots + A_r^{(r)} k^r; \end{array} \right.$$

si l'on multiplie chaque membre de cette équation par  $1+k$ , et si l'on observe que le coefficient  $A_x^{(r+1)}$  est égal à  $A_{x-1}^{(r)} + A_x^{(r)}$ , on voit facilement que

$$A_x^{(r+n)} = \sum_{y=0}^{y=n} A_{x-y}^{(r)} A_y^{(n)},$$

pourvu que l'on fasse toujours

$$A_0 = 1, \quad A_{-p}^{(m)} = 0, \quad A_{m+p}^{(m)} = 0.$$

Posons

$$x = n = r,$$

et en observant que

$$A_{x-y}^{(r)} = A_y^{(r)},$$

on obtient

$$(2) \quad A_r^{(2r)} = \sum_{y=0}^{y=r} A_y^{(r)^2},$$

c'est-à-dire que la somme des carrés des coefficients de la puissance  $r$  du binôme est égale au coefficient moyen de la puissance  $2r$  du même.

Il est à remarquer que la quantité  $A_r^{(2r)}$  multipliée par  $\frac{n}{4^r}$ , ou bien par  $na^r$ , donne, dans le premier cas, la somme

$$\begin{aligned} & \cos^{2r} \alpha + \cos^{2r} \left( \alpha - \frac{\pi}{n} \right) + \cos^{2r} \left( \alpha - 2 \frac{\pi}{n} \right) + \dots \\ & + \cos^{2r} \left[ \alpha - (n-1) \frac{\pi}{n} \right], \end{aligned}$$

quels que soient  $\alpha$  et  $n$ ,  $r$  entiers positifs; et dans le deuxième cas, la somme des puissances  $r$  des perpendiculaires abaissées d'un point de la circonférence de rayon  $2a$  sur les côtés du polygone régulier circonscrit.

En carrant l'équation connue

$$\sum A_y^{(r)} = 2^r,$$

et en désignant pas  $S$  la somme des produits deux à deux

des coefficients  $A_0, A_1, \dots$ , on a

$$\sum A_r^2 + 2S = 4';$$

d'où

$$S = \frac{1}{2} (4' - A_r^{(2)}),$$

laquelle fournit la solution de la question 290, proposée dans ce journal, page 192, tome XIII.

On peut arriver plus simplement à l'équation (2) de la manière suivante : que l'on multiplie l'équation (1) avec celle que l'on obtient en plaçant dans la même équation  $\frac{1}{k}$  au lieu de  $k$ , et l'on aura

$$\frac{(1+k)^{2r}}{k^r} = \sum A_r^{(2)} + P,$$

où  $P$  est un polynôme contenant  $k$  dans tous les termes ; par conséquent, la somme cherchée sera ce terme du premier membre où  $k$  n'entre pas, ou bien sera le coefficient de  $k^r$  dans le développement de  $(1+k)^{2r}$ , c'est-à-dire sera  $A_r^{(2)}$ , comme on l'a trouvé ci-dessus.

---