Sacchi

Seconde solution de la question 389 (Lagrange) et première de la question 290

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 369-371
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__369_1>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 389 (LAGRANGE) ET PREMIÈRE DE LA QUESTION 290

(voir page 296),

PAR M. LE DOCTEUR SACCHI,
De l'université de Pavie.

Si l'on représente par $A_x^{(r)}$ le coefficient de k^x dans le développement de $(1+k)^r$, on aura

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} (1+k)^r &= A_0^{(r)} + A_1^{(r)} k + \ldots \\ &\quad + A_{x-1}^{(r)} k^{x-1} + A_x^{(r)} k^x + \ldots + A_r^{(r)} k^r ; \end{aligned} \right.$$

si l'on multiplie chaque membre de cette équation par $1+k$, et si l'on observe que le coefficient ${}_x^{(r+1)}$ est égal à $A_{x-1}^{(r)} + A_x^{(r)}$, on voit facilement que

$$A_x^{(r+n)} = \sum_{y=0}^{y=n} A_{x-y}^{(r)} A_y^{(n)},$$

pourvu que l'on fasse toujours

$$A_0 = 1, \quad A_{-p}^{(m)} = 0, \quad A_{m+p}^{(m)} = 0.$$

Posons

$$x = n = r,$$

et en observant que

$$A_{x-y}^{(r)} = A_y^{(r)},$$

on obtient

$$(2) \qquad A_r^{(2r)} = \sum_{y=0}^{y=r} A_y^{(r)^2},$$

c'est-à-dire que la somme des carrés des coefficients de la puissance r du binôme est égale au coefficient moyen de la puissance $2r$ du même.

Il est à remarquer que la quantité $A_r^{(2r)}$ multipliée par $\frac{n}{4^r}$, ou bien par na^r, donne, dans le premier cas, la somme

$$\cos^{2r}\alpha + \cos^{2r}\left(\alpha - \frac{\pi}{n}\right) + \cos^{2r}\left(\alpha - 2\frac{\pi}{n}\right) + \ldots$$
$$+ \cos^{2r}\left[\alpha - (n-1)\frac{\pi}{n}\right],$$

quels que soient α et n, r entiers positifs; et dans le deuxième cas, la somme des puissances r des perpendiculaires abaissées d'un point de la circonférence de rayon $2a$ sur les côtés du polygone régulier circonscrit.

En carrant l'équation connue

$$\sum A_y^{(r)} = 2^r,$$

et en désignant pas S la somme des produits deux à deux des coefficients A_0, A_1,..., on a

$$\sum A_r^2 + 2S = 4^r;$$

d'où

$$S = \frac{1}{2}(4^r - A_r^{(2r)}),$$

laquelle fournit la solution de la question **290**, proposée dans ce journal, page 192, tome **XIII**.

On peut arriver plus simplement à l'équation (2) de la manière suivante : que l'on multiplie l'équation (1) avec celle que l'on obtient en plaçant dans la même équation $\frac{1}{k}$ au lieu de k, et l'on aura

$$\frac{(1+k)^{2r}}{k^r} = \sum A_r^{2(r)} + P,$$

où P est un polynôme contenant k dans tous les termes; par conséquent, la somme cherchée sera ce terme du premier membre où k n'entre pas, ou bien sera le coefficient de k^r dans le développement de $(1+k)^{2r}$, c'est-à-dire sera $A_r^{(2r)}$, comme on l'a trouvé ci-dessus.