NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MICHAEL ROBERTS

Sur une question d'algèbre relative à deux équations du quatrième degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 366-369

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__366_1>

SUR UNE QUESTION D'ALGÈBRE RELATIVE A DEUX ÉQUATIONS DU QUATRIÈME DEGRÉ

(voir t. XV, p. 76);

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

Étant données deux équations biquadratiques, savoir

$$\text{(I)}\quad ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0 \quad (\text{racines } \alpha, \beta, \gamma, \delta),$$

$$\text{(II)}\quad a'x^4 + 4b'x^3 + 6c'x^2 + 4d'x + e' = 0 \quad (\text{racines } \alpha', \beta', \gamma', \delta'),$$

je vais présenter dans ce qui suit les éléments de la formation de l'équation ayant pour racines les valeurs que prend la fonction

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta'.$$

Il est facile de voir que cette fonction a vingt-quatre valeurs, et l'équation dont il s'agit est assez compliquée : mais en faisant usage des solutions algébriques des équations données, j'ai réussi à la mettre sous une forme simple, qui se prête facilement aux divers résultats. Je dois mentionner surtout que j'ai été ainsi conduit par une marche très-simple à l'équation au carré des différences des racines de l'équation (I) : résultat que je ne me souviens d'avoir rencontré dans aucun traité d'algèbre.

Posons d'abord

$$a^2\varpi = b^2 - ac,$$

$$12a^2\mu = ae - 4bd + 3c^2,$$

$$8a^3\lambda = ace + 2bcd - ad^2 - cb^2 - c^3,$$

$$l = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \mu^3}, \quad m = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \mu^3},$$

et désignons par les mêmes lettres accentuées les quantités analogues pour l'équation (II).

Faisons maintenant

$$z = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta'$$

et introduisons la quantité auxiliaire u donnée par l'équation

$$u = \frac{1}{4}\left(z - \frac{4bb'}{aa'}\right)$$

et posons

$$u^4 - 6\varpi\varpi' u^2 - 2u\,\frac{(a^2d - 3abc + 2b^3)(a'^2d' - 3a'b'c' + 2b'^3)}{a^3a'^3}$$

$$- 3(3\varpi^2\varpi'^2 - 4\varpi^2\mu' - 4\omega'^2\mu - 2\mu\mu') = \mathrm{P},$$

$$6u^2 - 3\left(2\varpi\varpi' - \frac{l'm}{\mu\mu'} + \frac{4\varpi l'}{\mu'} + \frac{4\varpi' m}{\mu}\right) = \mathrm{Q},$$

$$6u^2 - 3\left(2\varpi\varpi' - \frac{lm'}{\mu\mu'} + \frac{4\varpi m'}{\mu'} + \frac{4\omega' l}{\mu}\right) = \mathrm{R},$$

et l'équation cherchée s'écrit de la manière suivante

$$\mathrm{P} = \mathrm{Q}\,(lm')^{\frac{1}{3}} + \mathrm{R}\,(l'm)^{\frac{1}{3}},$$

ce qui donne

$$\text{(III)} \qquad \mathrm{P}^3 = \mathrm{Q}^3\,lm' + \mathrm{R}^3\,l'm + 3\mu\mu'\,\mathrm{PQR}.$$

Or cette équation monte au douzième degré et ne contient que la seule expression irrationnelle

$$\sqrt{(\lambda^2 - \mu^3)(\lambda'^2 - \mu'^3)},$$

d'où, en élevant au carré, nous passons à l'équation cherchée

Pour trouver l'équation au carré des différences des racines de l'équation (I), il suffit de poser dans l'équation (II)

$$a' = 6, \quad b' = 0, \quad c' = -1, \quad d' = 0, \quad e' = 0 \ (*),$$

et, en substituant ces valeurs, nous trouvons

$$P = u^4 + \varpi u^2 + \frac{3}{8}\mu, \quad Q = 6u^2 + \frac{q}{4}\frac{m}{\mu}, \quad R = 6u^2 + \frac{q}{4}\frac{l}{\mu},$$

et l'équation (III) donne (en posant $2u^2 = \theta$)

$$\left(\theta^2 + 2\varpi\theta + \frac{3}{2}\mu\right)^3 = \left(\theta + \frac{3}{4}\frac{m}{\mu}\right)^3 l + \left(\theta + \frac{3}{4}\frac{l}{\mu}\right)^3 m$$
$$+ 3\mu\left(\theta + \frac{3}{4}\frac{m}{\mu}\right)\left(\theta + \frac{3}{4}\frac{l}{\mu}\right)\left(\theta^2 + 2\varpi\theta + \frac{3}{2}\mu\right)$$

ou bien

$$\left(\theta^2 + 2\varpi\theta + \frac{3}{2}\mu\right)^3 = \left(\theta + \frac{3}{4}\frac{m}{\mu}\right)^3 l + \left(\theta + \frac{3}{4}\frac{l}{\mu}\right)^2 m$$
$$+ 3\left(\theta^2 + 2\varpi\theta + \frac{3}{2}\mu\right)\left(\mu\theta^2 - \frac{3}{2}\lambda\theta + \frac{9}{16}\mu^2\right),$$

et, en posant

$$t = -8\theta,$$

les quantités

$$(\alpha - \beta)^2, \quad (\alpha - \gamma)^2, \quad (\alpha - \delta)^2,$$
$$(\beta - \gamma)^2, \quad (\beta - \delta)^2, \quad (\gamma - \delta)^2$$

(*) z^2 devient alors $6(\alpha - \alpha')^2$. Tm.

seront les racines de l'équation suivante en t :

$$t^6 - 4\delta\varpi t^5 + 96t^4(\mu + \delta\varpi^2) - 256t^3(16\varpi^3 + 24\mu\varpi + 13\lambda)$$
$$+ (4\delta)^2 t^2(32\varpi^2\mu + 16\varpi\lambda - 7\mu^2) - (24)^4 t(\mu^2\varpi + \mu\lambda)$$
$$+ 108.8^4(\mu^3 - \lambda^2) = 0.$$

Si les équations données sont identiques, l'équation (III) appartient à deux équations distinctes.

On peut remarquer la relation suivante, qu'on peut démontrer directement :

$$4a^6(\varpi^3 - 2\lambda - 3\varpi\mu) = (a^2 d - 3abc + 2b^3)^2.$$