NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GERONO

Formules d'interpolation de Lagrange et de Newton (Fin d'un premier article)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 358-366

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__358_0>

FORMULES D'INTERPOLATION DE LAGRANGE ET DE NEWTON
(Fin d'un premier article)

(voir page 317).

On peut de la formule d'interpolation de Lagrange déduire celle de Newton, en supposant que les nombres x_0, $x_1,\ldots, x_{m-1}, x_m$ soient les termes de la progression arithmétique $x_0, x_0+h,\ldots, x_0(m-1)h, x_0+mh$.

Reprenons la première de ces formules qui est

$$
(3)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})(x-x_m)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{m-1})(x-x_m)}u_0\\
&+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})(x-x_m)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{m-1})(x_1-x_m)}u_1+\ldots\\
&+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{p-1})(x-x_{p+1})\ldots(x-x_{m-1})(x-x_m)}{(x_p-x_0)(x_p-x_1)\ldots(x_p-x_{p-1})(x_p-x_{p+1})\ldots(x_p-x_{m-1})(x_p-x_m)}u_p+\ldots\\
&+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-2})(x-x_m)}{(x_{m-1}-x_0)(x_{m-1}-x_1)\ldots(x_{m-1}-x_{m-2})(x_{m-1}-x_m)}u_{m-1}\\
&+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-2})(x-x_{m-1})}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{m-2})(x_m-x_{m-1})}u_m.
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on remplace $x_1, x_2,\ldots, x_m$ par $x_0+h, x_0+2h,\ldots, x_0+mh$, le dernier terme de cette formule devient

$$\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)\ldots[x-x_0-(m-2)h][x-x_0-(m-1)h]}{mh.(m-1)h\ldots 2h.h}u_m$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\left(\dfrac{x-x_0}{h}\right)\left(\dfrac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\dfrac{x-x_0}{h}-(m-2)\right]\left[\dfrac{x-x_0}{h}-(m-1)\right]}{m.(m-1)\ldots 2.1}u_m.$$

L'avant-dernier terme prendra la forme

$$\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)\,..[x-x_0-(m-2\,h]\,(x-x_0-mh)}{(m-1)\,h\,.(m-2)\,h\ldots h\times(-h)}\,u_{m-1},$$

et pourra s'écrire ainsi

$$-\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-2)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{(m-1)\,(m-2)\ldots1\,.\,1}\,u_{m-1},$$

et, afin que le dénominateur soit encore le produit $m\,(m-1)\ldots3.2.1$, on multipliera par m les deux termes de l'expression précédente, ce qui donnera

$$-\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-2)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m\,(m-1)\ldots3\,.\,2\,.\,1}\,.\,mu_{m-1}.$$

On trouvera de même que les termes précédant l'avant-dernier de la formule (3) deviennent respectivement

$$+\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-1)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m\,(m-1)\ldots3\,.\,2\,.\,1}$$

$$\times\frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,u_{m-2},$$

$$-\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-1)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m\,(m-1)\ldots3\,.\,2\,.\,1}$$

$$\times\frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,u_{m-3},$$

. . . .

Considérons généralement le terme

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{p-1})(x-x_{p+1})\ldots(x-x_{m-1})(x-x_m)}{(x_p-x_0)(x_p-x_1)\ldots(x_p-x_{p-1})(x_p-x_{p+1})\ldots(x_p-x_{m-1})(x_p-x_m)}u_p,$$

dans lequel le nombre p est supposé moindre que m. En remplaçant dans ce terme x_1, $x_2,\ldots$, x_{p-1}, x_p, $x_{p+1},\ldots$, x_{m-1}, x_m par x_0+h, $x_0+2h,\ldots$, $[x_0+(p-1)h]$, (x_0+ph), $[x_0+(p+1)h],\ldots$, $[x_0+(m-1)h]$, (x_0+mh), on a d'abord

$$\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)\ldots[x-x_0-(p-1)h][x-x_0-(p+1)h]\ldots[x-x_0-(m-1)h](x-x_0-mh)}{ph.(p-1)h\ldots h.(-h)\times-[(m-1)-p]h\times-(m-p)h}u_p.$$

Puis

$$\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(p-1)\right]\left[\frac{x-x_0}{h}-(p+1)\right]\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-1)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{p.(p-1)\ldots1(-1)\ldots\times-[(m-1)-p]\times-(m-p)}u_p,$$

ou bien encore

$$\pm\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(p-1)\right]\left[\frac{x-x_0}{h}-(p+1)\right]\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-1)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{p(p-1)\ldots1\times1\ldots[(m-1)-p](m-p)}u_p$$

et enfin

$$\pm\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(p-1)\right]\left[\frac{x-x_0}{h}-(p+1)\right]\ldots\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m(m-1)\ldots3.2.1}$$

$$\times\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p}u_p.$$

Il faut mettre le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que $m-p$ est pair ou impair.

Ainsi, lorsque les valeurs substituées à la variable x sont x_0, x_0+h, $x_0+2h,\ldots$, $x_0+(m-1)h$, x_0+mh, on peut donner à la formule d'interpolation de Lagrange la forme suivante :

$$
(4)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\cdots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-1)\right]}{m(m-1)\ldots 3.2.1}u_m \\
&-\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\cdots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-2)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m(m-1)\ldots 3.2.1}mu_{m-1}+\ldots \\
&\pm\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\cdots\left[\frac{x-x_0}{h}-(p-1)\right]\left[\frac{x-x_0}{h}-(p+1)\right]\cdots\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m(m-1)\ldots 3.2.1} \\
&\times\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ .\ p}u_p+\ldots \\
&\mp\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-2\right)\cdots\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m(m-1)\ldots 3.2.1}mu_1 \\
&\pm\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\cdots\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m(m-1)\ldots 3.2.1}u_0.
\end{aligned}
\right.
$$

Pour en déduire la formule d'interpolation de Newton, il faut remplacer u_m, u_{m-1}, $u_{m-2}, \ldots$, u_1 par les développements

$$
(5)\left\{
\begin{aligned}
&u_0+m\,\Delta u_0+\frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 u_0+\ldots+\Delta^m u_0, \\
&u_0+(m-1)\,\Delta u_0+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\Delta^2 u_0+\ldots+\Delta^{m-1} u_0, \\
&u_0+(m-2)\,\Delta u_0+\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}\Delta^2 u_0+\ldots+\Delta^{m-2} u_0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&u_0+\Delta u_0.
\end{aligned}
\right.
$$

Afin d'abréger l'écriture, posons $z=\frac{x-x_0}{h}-m$. Il en résultera

$$z+1=\frac{x-x_0}{h}-(m-1),$$

$$z+2=\frac{x-x_0}{h}-(m-2)\ldots,$$

$$z+m=\frac{x-x_0}{h}.$$

Et en représentant par $f(z)$ le produit des $(m+1)$ facteurs consécutifs z, $(z+1)$, $(z+2)$,..., $(z+m)$, la formule (4) se transformera en celle-ci

$$(6)\quad \frac{1}{m(m-1)\ldots3.2.1}\left\{\begin{array}{l} \frac{f(z)}{z}u_m-\frac{f(z)}{z+1}\cdot mu_{m-1}+\frac{f(z)}{z+2}\cdot\frac{m(m-1)}{1.2}u_{m-2}-\ldots \\ \qquad\pm\frac{f(z)}{z+m-p}\,\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}u_p\mp\ldots \\ \qquad\mp\frac{f(z)}{z+m-1}\cdot mu_1\pm\frac{f(z)}{z+m}u_0. \end{array}\right\}$$

Si l'on remplace dans la formule (6) u_m, u_{m-1}, u_{m-2},..., u_1 par les développements (5), le résultat de la substitution sera évidemment une expression de la forme

$$a_0u_0+a_1\Delta u_0+a_2\Delta^2u_0+\ldots+a_p\Delta^pu_0+\ldots+a_m\Delta^mu_0,$$

et on aura d'abord

$$a_0=\frac{1}{m(m-1)\ldots2.1}\left[\begin{array}{c}\frac{f(z)}{z}-m\frac{f(z)}{z+1}+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{f(z)}{z+1}+\ldots \\ \mp m\frac{f(z)}{z+m-1}\pm\frac{f(z)}{z+m}\end{array}\right].$$

Mais on a vu (page 317) que

$$1.2.3\;m=\frac{f(z)}{z}-m\cdot\frac{f(z)}{z+1}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{f(z)}{z+2}-\ldots$$
$$\mp m\frac{f(z)}{z+m-1}\pm\frac{f(z)}{z+m};$$

donc

$$a_0 = 1.$$

Il viendra ensuite

$$a_1 = \frac{1}{m(m-1)\ldots 2.1}$$

$$\times \left[\begin{array}{l} m\dfrac{f(z)}{z} - m(m-1)\dfrac{f(z)}{z+1} + \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2}\dfrac{f(z)}{z+2} - \ldots \\ \qquad\qquad\qquad \mp m\dfrac{f(z)}{z+m-1} \end{array} \right],$$

d'où

$$a_1 = \frac{1}{(m-1)\ldots 2.3}$$

$$\times \left[\begin{array}{l} \dfrac{f(z)}{z} - (m-1)\dfrac{f(z)}{z+1} + \dfrac{(m-1)(m-2)}{1.2}\dfrac{f(z)}{z+2} - \ldots \\ \qquad\qquad\qquad \mp \dfrac{f(z)}{z+m-1} \end{array} \right],$$

ou bien, en représentant par $\varphi(z)$ le produit des m facteurs consécutifs z, $z+1,\ldots$, $z+m-1$, et en ayant égard à ce que

$$f(z) = \varphi(z) \times (z+m),$$

on aura

$$a_1 = \frac{z+m}{(m-1)\ldots 2.1}$$

$$\times \left[\begin{array}{l} \dfrac{\varphi(z)}{z} - (m-1)\dfrac{\varphi(z)}{z+1} + \dfrac{(m-1)(m-2)}{1.2}\dfrac{\varphi(z)}{z+2} - \ldots \\ \qquad\qquad\qquad \mp \dfrac{\varphi(z)}{z+m-1} \end{array} \right].$$

Or (page 317)

$$1.2\ldots(m-1) = \frac{\varphi(z)}{z} - (m-1)\frac{\varphi(z)}{z+1}$$

$$+ \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\frac{\varphi(z)}{z+1} + \ldots \mp \frac{\varphi(z)}{z+m-1},$$

donc

$$a_1 = z + m = \frac{x - x_0}{h}.$$

Le coefficient a_p du terme général $a_p \Delta^p u_0$ sera déterminé par l'égalité

$$a_p = \frac{1}{m(m-1)\ldots 2.1}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p} \dfrac{f(z)}{z} \\ - m.\dfrac{(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-p)}{1.2.3\ldots p} \dfrac{f(z)}{z+1} \\ + \dfrac{m(m-1}{1.2}.\dfrac{(m-2)(m-3)\ldots(m-p-1)}{1.2\ldots p} \dfrac{f(z)}{z+2} - \ldots \\ \pm \dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p} \dfrac{f(z)}{z+m-p} \end{array} \right\},$$

d'où, en réduisant,

$$a_p = \frac{1}{1.2.3\ldots(m-p)}$$

$$\times \left[\frac{\dfrac{f(z)}{z} - (m-p)\dfrac{f(z)}{z+1} + (m-p)(m-p-1)\dfrac{f(z)}{z+2} - \ldots \pm \dfrac{f(z)}{z+m-p}}{1.2.3\ldots(p-1)p} \right].$$

Cela posé, nommons $\varphi(z)$ le produit des $(m-p+1)$ facteurs consécutifs z, $z+1$, $z+2,\ldots$, $(z+m-p)$, il en résultera

$$f(z) = \varphi(z) \times (z+m-p+1)(z+m-p+2)\ldots(z+m),$$

et par suite

$$a_p = \frac{(z+m)\ldots(z+m-p+1)}{1.2.3\ldots(m-p)}$$

$$\times \left[\frac{\dfrac{\varphi(z)}{z} - (m-p)\dfrac{\varphi(z)}{z+1} + \dfrac{(m-p)(m-p-1)}{1.2}\dfrac{\varphi(z)}{z+2} - \ldots \pm \dfrac{\varphi(z)}{z+m-p}}{1.2.3\ldots(p-1)p} \right].$$

Mais

$$1.2.3\ldots(m-p) = \frac{\varphi(z)}{z} - (m-p)\frac{\varphi(z)}{z+1}$$

$$+ \frac{(m-p)(m-p-1)}{1.2} - \ldots + \frac{\varphi(z)}{z+m-p};$$

donc

$$a_p = \frac{(z+m)(z+m-1)\ldots[(z+m-(p-1))]}{1.2\ldots p},$$

et, parce que

$$z+m = \frac{x-x_0}{h},$$

on aura

$$a_p = \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(p-1)\right]}{1.2\ldots p}.$$

En remplaçant successivement p par les nombres 1, 2, 3,..., m, cette dernière égalité donne

$$a_1 = \frac{x-x_0}{h},$$

$$a_2 = \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)}{1.2},$$

$$a_3 = \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-2\right)}{1.2.3}, \ldots,$$

$$a_m = \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-1)\right]}{1.2.3\ldots m}.$$

D'ailleurs

$$a_0 = 1,$$

par conséquent l'expression

$$a_0 u_0 + a_1 \Delta u_0 + a_2 \Delta^2 u_0 + \ldots + a_m \Delta^m u_0$$

revient à

$$u_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta u_0 + \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1 \; 2} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 2\right)\ldots$$
$$\times \left[\frac{x - x_0}{h} - (m - 1)\right]\frac{\Delta^m u_0}{1.2.3\ldots m}.$$

Ce qui est la formule d'interpolation de Newton.

G.