

E. DE JONQUIÈRES

Solution de la question 388 (Faure)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 347-354

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__347_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 388 (FAURE)

(voir p 183),

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

I. Cette question se rattache directement à la belle théorie des *courbes polaires*, que le lecteur trouvera exposée dans l'ouvrage de M. G. Salmon intitulé : *A Treatise on the higher plane curves*, p. 57 et suivantes. Mais pour montrer ici comment la solution se déduit de cette théorie, il est nécessaire d'en rappeler en peu de mots les propositions principales.

On sait, depuis Cotes (*), que si une transversale tourne autour d'un point fixe dans le plan d'une courbe géométrique, le *centre des moyennes harmoniques* des points de rencontre de la courbe par la transversale, pris relativement au point fixe, décrit une ligne droite.

Ce centre harmonique est donné, pour chaque position de la transversale, par l'équation

$$(1) \quad \sum \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} \right) = 0,$$

dans laquelle ρ exprime sa distance au pôle fixe O ; ρ_1 la distance du pôle à l'un des points de rencontre de la transversale et de la courbe, et où le signe Σ indique qu'il faut faire la somme d'autant de termes semblables qu'il y a d'unités dans le degré de la courbe donnée.

La droite que décrit le centre harmonique a reçu le nom de *droite polaire* du pôle O par rapport à la courbe.

(*) Voir t. IX, p. 265, 285 et 344.

II. Par analogie, si, au lieu de l'équation (1), on prend la suivante

$$\sum \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} \right) \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_2} \right) = 0,$$

le point variable dont ρ exprime la distance au pôle fixe O, décrit évidemment une conique qui a reçu le nom de *conique polaire* du point O par rapport à la courbe.

Plus généralement, on appelle *courbe polaire de l'ordre k* d'un point fixe par rapport à une courbe géométrique, celle dont le rayon vecteur ρ , compté à partir de ce point pris pour origine, est donné par l'équation du *k^{ième}* degré

$$\sum \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} \right) \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_2} \right) \cdots \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_k} \right) = 0,$$

dans laquelle chaque terme se compose du produit de *k* facteurs tels que $\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} \right)$.

III. Un point fixe a donc *m - 1* courbes polaires par rapport à une courbe géométrique du degré *m*. On désigne par les noms de :

Première polaire celle dont le degré est *m - 1* ;

Deuxième polaire celle dont le degré est *m - 2* ;

Et ainsi de suite.

Les trois dernières courbes de cette série descendante sont la *cubique polaire*, la *conique polaire* et la *droite polaire* du point fixe par rapport à la courbe.

IV. Il existe un lien remarquable entre ces différentes courbes : c'est que l'une quelconque d'entre elles est aussi l'une des courbes polaires du point fixe par rapport à toutes celles qui la précèdent dans la hiérarchie. Par exemple, soient X, Y, Z la droite, la conique et la cubique polaire d'un point O par rapport à une courbe du

quatrième ordre U ; la droite X est aussi la polaire du point O , soit par rapport à la cubique Z , soit par rapport à la conique Y , et celle-ci est également la conique polaire du point O par rapport à la cubique Z .

V. On démontre aisément (*voir* Salmon, p. 59) que les points de contact des tangentes, menées par le pôle O à la courbe donnée U , sont situés sur la première polaire de ce point, ce qui prouve incidemment que ces tangentes sont au nombre de $m(m-1)$, puisque la courbe est du degré m et sa première polaire du degré $m-1$.

VI. Si la courbe V a un point multiple de l'ordre p , ce point est multiple de l'ordre $p-1$ sur la première polaire; il est multiple de l'ordre $p-2$ sur la seconde polaire, et ainsi de suite, quel que soit d'ailleurs le pôle de ces diverses polaires.

Si la courbe U n'a que deux points doubles, la première polaire est seule à passer par chacun de ces points, et elle n'y passe qu'une fois.

VII. On démontre encore (Salmon, p. 61) cette autre propriété qui va être utile pour résoudre la question 388, savoir, que la tangente à la première polaire en l'un des points doubles de la courbe U est conjuguée harmonique de la droite qui joint ce point double au pôle, par rapport aux deux tangentes que la courbe U possède en ce point double.

VIII. $U = 0$ étant l'équation de la courbe donnée exprimée en *coordonnées trilineaires* (c'est-à-dire rendue homogène par la substitution des variables $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ aux coordonnées ordinaires x, y), et x_1, y_1, z_1 étant les coordonnées du pôle O , l'équation de la première polaire Z de ce pôle est

$$Z = x_1 \frac{dU}{dx} + y_1 \frac{dU}{dy} + z_1 \frac{dU}{dz} = 0. \quad (\text{Salmon, p. 58.})$$

Celle de la seconde polaire est

$$Y = x_1 \frac{dZ}{dx} + y_1 \frac{dZ}{dy} + z_1 \frac{dZ}{dz} = 0,$$

c'est-à-dire

$$Y = x_1^2 \frac{d^2 U}{dx^2} + y_1^2 \frac{d^2 U}{dy^2} + z_1^2 \frac{d^2 U}{dz^2} + 2 x_1 y_1 \frac{d^2 U}{dx dy} \\ + 2 y_1 z_1 \frac{d^2 U}{dy dz} + 2 z_1 x_1 \frac{d^2 U}{dz dx} = 0,$$

et ainsi de suite.

IX. La solution de la question 388 découle aisément de ce qui précède. En effet, les m droites données a , b , c , etc., représentent une courbe du $m^{\text{ième}}$ degré douée de $\frac{1}{2} m (m - 1)$ points doubles.

La première polaire Z du pôle A par rapport à cette courbe passera donc une fois par chacun des points doubles (VI), c'est-à-dire par les $\frac{1}{2} m (m - 1)$ points d'intersections mutuelles de ces droites. En chacun de ces points, tels que (a, b) , elle aura pour tangente (n° VII) la droite conjuguée harmonique de la droite $A (a, b)$ par rapport aux deux tangentes que la courbe possède en ce point double et qui ne sont autre chose ici que les droites a et b elles-mêmes. Enfin si $U = 0$ est l'équation homogène en x, y, z qui représente le système des m droites (équation de degré m résoluble en m facteurs linéaires, dont chacun se rapporte à l'une des droites données), l'équation de cette première polaire sera (VIII)

$$Z = x_1 \frac{dU}{dx} + y_1 \frac{dU}{dy} + z_1 \frac{dU}{dz} = 0.$$

On aura pareillement, pour un autre point $A' (x_2, y_2, z_2)$,

$$Z' = r_1 \frac{dU}{dx} + r_2 \frac{dU}{dy} + z_2 \frac{dU}{dz} = 0.$$

Or les $(m-1)(m-2)$ points de contact des tangentes à la courbe z' , issues du point A , sont situés (V) sur la première polaire W du point A par rapport à Z' , et les $(m-1)(m-2)$ points de contact des tangentes à la courbe Z , issues du point A' , sont situés sur la première polaire W' du point A' par rapport à Z . Donc on a (VIII)

$$W = x_1 \frac{dZ'}{dx} + y_1 \frac{dZ'}{dy} + z_1 \frac{dZ'}{dz} = 0,$$

et

$$W' = r_1 \frac{dZ}{dx} + r_2 \frac{dZ}{dy} + z_1 \frac{dZ}{dz} = 0$$

D'où l'on conclut immédiatement, en effectuant les différentiations, cette identité :

$$\begin{aligned} W = W' &= x_1 r_2 \frac{d^2 U}{dx^2} + y_1 r_2 \frac{d^2 U}{dy^2} + z_1 z_2 \frac{d^2 U}{dz^2} \\ &+ (x_1 y_1 + x_2 y_1) \frac{d^2 U}{dx dy} + (r_1 z_1 + r_2 z_1) \frac{d^2 U}{dy dz} \\ &+ (z_1 r_2 + r_2 z_1) \frac{d^2 U}{dz dx} = 0. \end{aligned}$$

Ce qui démontre le dernier théorème énoncé dans la question proposée, laquelle se trouve ainsi complètement résolue.

Quand on ne donne que trois ou quatre droites, on peut démontrer, sans le secours de l'analyse, plusieurs des propositions qui précèdent. Ainsi dans le cas des trois droites, il suffira de s'appuyer sur les n^{os} 372 et 658 de la *Géométrie supérieure*, et, dans le cas de quatre droites, sur les n^{os} 393 et 405 combinés avec une pro-

priété des courbes du troisième ordre qu'on trouvera énoncée page 245 de ma *Traduction de Maclaurin*.

Mais ces développements particuliers seraient ici superflus.

Nota. Voici la démonstration du théorème important qui est cité au § V.

On prouve d'abord que *la première polaire d'un point fixe O, par rapport à une courbe donnée, est aussi le lieu géométrique des points dont les droites polaires passent par le point O.*

En effet l'équation

$$x \left(\frac{dU}{dx} \right)_1 + y \left(\frac{dU}{dy} \right)_1 + z \left(\frac{dU}{dz} \right)_1 = c$$

exprime une relation entre x, y, z , coordonnées d'un point quelconque de la droite polaire, et x_1, y_1, z_1 coordonnées du pôle. Donc si le premier de ces deux points est fixe (x_2, y_2, z_2) et le second variable, le lieu géométrique de ce dernier sera représenté par l'équation

$$x_2 \left(\frac{dU}{dx} \right) + y_2 \left(\frac{dU}{dy} \right) + z_2 \left(\frac{dU}{dz} \right) = 0,$$

qui est précisément l'équation de la première polaire du point (x_2, y_2, z_2) par rapport à la courbe.

Ce théorème peut encore se démontrer comme il suit : Soient O le point fixe et O' un point quelconque de la première polaire du point O; a, b, c, \dots, m étant les points de rencontre de la transversale OO' et de la courbe, on a par hypothèse l'équation

$$\sum \left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oa} \right) \left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Ob} \right) \dots \left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Om} \right) = 0,$$

et il suffit de montrer qu'on a en même temps

$$\sum \left(\frac{1}{O'O} - \frac{1}{O'a} \right) = 0.$$

Or cette seconde équation est toujours une conséquence de la première, comme il est facile de le voir, au moyen d'une simple vérification, en écrivant

$$O'a = OO' - Oa, \quad O'b = OO' - Ob,$$

et ainsi de suite.

On démontre, en second lieu, que la droite polaire d'un point simple d'une courbe est la tangente à la courbe en ce point.

Cette proposition, qui résulte très-simplement de quelques théorèmes qu'il serait trop long de rappeler ici et qu'on trouvera dans l'ouvrage de Salmon, peut se démontrer ainsi qu'il suit.

Soit O' un point quelconque de la droite polaire d'un pôle donné O . On a l'équation

$$\sum \left(\frac{1}{OO'} - \frac{1}{Oa} \right) = 0$$

ou

$$\sum \left(\frac{O'a}{OO'.Oa} \right) = 0.$$

En développant, il vient celle-ci

$$O'a.Ob.Oc.Od\dots Om + O'b.Oa.Oc.Od\dots Om \\ + O'c.Oa.Ob.Od\dots Om + \dots = 0,$$

dans laquelle tous les termes, à l'exception du premier, contiennent le facteur Oa . Donc si le point O est pris en a sur la courbe, Oa est nul et l'équation se réduit à son premier terme

$$(1) \quad O'O.Ob.Oc\dots Om = 0.$$

Or le point a n'étant pas un point multiple de la courbe donnée, les lignes $O'b, Oc, \dots, Om$ ne sont pas nulles en

général; donc on a simplement

$$OO' = 0,$$

ce qui signifie que, pour toutes les directions de la transversale OO' , la droite polaire du point O de la courbe passe par ce point lui-même. Mais si l'on prend pour cette transversale la tangente même de la courbe, Ob est nul et l'équation (1) est satisfaite d'elle-même, quelle que soit la valeur de OO' , ce qui signifie que tous les points de la transversale, actuellement tangente à la courbe, appartiennent à la droite polaire du point de contact, ou, en d'autres termes, que cette tangente est la droite polaire elle-même.

C. Q. F. D.

De ce théorème et du précédent on conclut immédiatement que *les points de contact des tangentes issues d'un point donné sont sur la première courbe polaire de ce plan*. C'est précisément ce qu'il fallait prouver.
