Solution de la question, énoncée t. XVI, p. 109

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 341-342

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__341_0>

SOLUTION DE LA QUESTION

énoncée t. XVI, p. 109

PAR UN ÉLÈVE DU LYCÉE DE CARCASSONNE.

Étant donnés un cercle et deux perpendiculaires à l'extrémité d'un diamètre AB, mener une tangente CD telle, que le volume engendré par le trapèze ainsi formé tournant autour du diamètre AB soit égal à une sphère de rayon donné a.

Je prends pour inconnues les segments interceptés sur les deux perpendiculaires par la tangente CD. Je joins le centre O aux points C, D et au point de contact T. Le triangle COD est rectangle et donne

$$\overline{OT}^2 = \overline{CT}.\overline{TD};$$

or

$$AC = CT, \quad BD = DT,$$

donc

$$R^2 = xy;$$

le trapèze ABDC engendre un tronc de cône dont le volume est

$$\frac{1}{3}\pi(2R)(x^2 + y^2 + xy) = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

La seconde équation se simplifie par la suppression des facteurs communs et l'élimination de xy. On peut alors isoler $x^2 + y^2$; puis par l'addition et la soustraction de $2xy$, on obtient

$$(x+y)^2 \quad \text{et} \quad (x-y)^2,$$

enfin

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a^3}{R} + R^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a^3}{R} - 3R^2},$$

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a^3}{R} + R^2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a^3}{R} - 3R^2}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut que

$$\frac{2a^3}{R} \geqq 3R^2;$$

le minimum de a est donc $R\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.