

**Théorème d'Euler sur l'aire du secteur
parabolique (voir tome XV, page 13)**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 33-37

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__33_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉOREME D'EULER SUR L'AIRES DU SECTEUR PARABOLIQUE

(voir tome XV, page 13)

$$r = \frac{p}{4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi}, \quad r' = \frac{p}{4 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi'}$$

$$\varphi' - \varphi = \theta, \quad \varphi > 0, \quad \varphi' > 0, \quad r' > r,$$

on a

$$p = \frac{4rr' \sin^2 \frac{1}{2} \theta}{r + r' - 2 \cos \frac{1}{2} \theta \sqrt{rr'}}$$

(34)

$$S = \frac{1}{24} (2r + p) \sqrt{4rp - p^2}$$

égale aire du segment parabolique compris entre r et l'axe.

$$S_1 = \frac{1}{24} [(2r' + p) \sqrt{4r'p - p^2} \mp (2r + p) \sqrt{4rp - p^2}]$$

égale aire du segment compris entre r et r' .

$$4r - p = \frac{4r \left[\sqrt{r} - \cos \frac{1}{2} \theta \sqrt{r'} \right]^2}{r + r' - 2 \cos \frac{1}{2} \theta \sqrt{rr'}},$$
$$2r + p = 2r \frac{r + r' - 2 \cos \frac{1}{2} \theta \sqrt{rr'} + 2r' \sin^2 \frac{1}{2} \theta}{r + r' - 2 \cos \frac{1}{2} \theta \sqrt{rr'}};$$

On a des expressions semblables pour $4r' - p$ et $2r' + p$.

$$\sqrt{r} - \cos \frac{1}{2} \theta \sqrt{r'}$$

est négatif. et

$$\sqrt{r'} - \cos \frac{1}{2} \theta \sqrt{r}$$

est positif. Donc

$$\sqrt{4r - p} = - \frac{2 \sqrt{r} \left(\sqrt{r} - \cos \frac{1}{2} \theta \sqrt{r'} \right)}{\sqrt{r + r' - 2 \cos \frac{1}{2} \theta \sqrt{rr'}}},$$
$$\sqrt{4r' - p} = \frac{2 \sqrt{r'} \left(\sqrt{r'} - \cos \frac{1}{2} \theta \sqrt{r} \right)}{\sqrt{r + r' - 2 \cos \frac{1}{2} \theta \sqrt{rr'}}}.$$

Substituant ces valeurs dans S_1 , on a

$$\frac{6S_1}{\sqrt{p}} = \frac{A + B}{C},$$

$$A = r' \left(r + r' - 2 \cos \frac{1}{2} \theta \sqrt{rr'} + 2r \sin^2 \frac{1}{2} \theta \right) \\ \times \left(\sqrt{r'} - \cos \frac{1}{2} \theta \sqrt{r} \right) \sqrt{r'},$$

$$B = r \left(r + r' - 2 \cos \frac{1}{2} \theta \sqrt{rr'} + 2r' \sin^2 \frac{1}{2} \theta \right) \\ \times \left(\sqrt{r} - \cos \frac{1}{2} \theta \sqrt{r'} \right) \sqrt{r},$$

$$C = \left(r + r' - 2 \cos \frac{1}{2} \theta \sqrt{rr'} \right)^{\frac{3}{2}};$$

$$A + B = \left(r + r' - 2 \cos \frac{1}{2} \theta \sqrt{rr'} \right) \\ \times \left[(r + r')^2 - (r + r') \cos \frac{1}{2} \theta \sqrt{rr'} - 2rr' \cos^2 \frac{1}{2} \theta \right] \\ = \left(r + r' + \cos \frac{1}{2} \theta \sqrt{rr'} \right) \left(r + r' - 2 \cos \frac{1}{2} \theta \sqrt{rr'} \right)^2;$$

d'où

$$S_1 = \frac{1}{6} \left(r + r' + \cos \frac{1}{2} \theta \sqrt{rr'} \right) \sqrt{p \left(r + r' - 2 \cos \frac{1}{2} \theta \sqrt{rr'} \right)}.$$

Observation. On parvient au même résultat en supposant φ et φ' de signes opposés.

Soit s la longueur de la corde qui joint les extrémités des rayons vecteurs r et r' ; on a

$$2 \cos \frac{1}{2} \theta \sqrt{rr'} = \pm \sqrt{(r + r')^2 - s^2},$$

le signe supérieur lorsqu'on a $0 < \theta < 180$, et le signe

inférieur pour $180 < \theta < 360$. Donc

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{12} \left[2(r+r') \pm \sqrt{(r+r')^2 - s^2} \right] \\ &\quad \times \sqrt{r+r' \mp \sqrt{(r+r')^2 - s^2}} \\ &\quad \sqrt{r+r' \mp \sqrt{(r+r')^2 - s^2}} \\ &= \left(\frac{r+r'+s}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \mp \left(\frac{r+r'-s}{2} \right)^{\frac{1}{2}} : \end{aligned}$$

car

$$\sqrt{r+r'} \mp \sqrt{(r+r')^2 - s^2}$$

doit être positif.

Faisons

$$\frac{r+r'+s}{2} = d, \quad \frac{r+r'-s}{2} = e,$$

on aura

$$S_1 = \frac{1}{6} \left[d + e \pm \left(\frac{de}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] [d \mp e] \sqrt{p},$$

d'où

$$S_1 = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{p}{2}} \left[d^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}} \right].$$

Telle est la belle expression de l'aire du secteur parabolique trouvée par Euler (*Miscell. Berolin.*, t. VII, p. 20). Mais Euler n'en a tiré aucun parti, et le théorème était tellement oublié, que Lambert croyait l'avoir découvert, ainsi qu'on le voit dans son ouvrage : *Insigniores orbîtæ cometarum proprietates*, Aug. Vindelic., 1761, § 83, et dans ses *Beitrag*, partie III, p. 257, 1765, et depuis on a en effet attribué le théorème à Lambert. C'est M. Gauss qui a revendiqué les droits d'Euler (*Motus theoriæ planet.*, p. 119; 1809). Il est pourtant vrai que Lambert est le premier qui ait étendu le théorème à l'ellipse et à l'hyperbole.

M. Gentil, chef d'institution, a publié en 1854, chez

Mallet-Bachelier : *Démonstration d'un théorème de Lambert par la géométrie*, in-8 de 8 pages. Cette démonstration est fondée sur des théorèmes énoncés dans un programme de l'université de Dublin (*Nouvelles Annales*, 1847, t. VI, p. 450, n^{os} 5-12).