Nouvelles annales de mathématiques

Théorème d'Euler sur l'aire du secteur parabolique (voir tome XV, page 13)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 33-37

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__33_1>

THÉORÈME D'EULER SUR L'AIRE DU SECTEUR PARABOLIQUE

(voir tome XV, page 13)

$$r = \frac{p}{4\cos^2\frac{1}{2}\varphi}, \quad r' = \frac{p}{4\cos^2\frac{1}{2}\varphi'},$$

$$\varphi' - \varphi = \theta, \quad \varphi > 0, \quad \varphi' > 0, \quad r' > r,$$

on a

$$p = \frac{4rr'\sin^2\frac{1}{2}\theta}{r + r' - 2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}}.$$

$$S = \frac{1}{24}(2r+p)\sqrt{4rp-p^2}$$

égale aire du segment parabolique compris entre r et l'axe.

$$S_1 = \frac{1}{24}\left[(2r'+p)\sqrt{4r'p-p^2} \mp (2r+p)\sqrt{4rp-p^2}\right]$$

égale aire du segment compris entre r et r'.

$$4r-p = \frac{4r\left[\sqrt{r}-\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r'}\right]^2}{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}},$$

$$2r+p = 2r\,\frac{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}+2r'\sin^2\frac{1}{2}\theta}{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}};$$

On a des expressions semblables pour $4r'-p$ et $2r'+p$.

$$\sqrt{r}-\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r}$$

est négatif, et

$$\sqrt{r'}-\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r'}$$

est positif. Donc

$$\sqrt{4r-p} = -\frac{2\sqrt{r}\left(\sqrt{r}-\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r'}\right)}{\sqrt{r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}}},$$

$$\sqrt{4r'-p} = \frac{2\sqrt{r'}\left(\sqrt{r'}-\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r}\right)}{\sqrt{r+r'-\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}}}.$$

Substituant ces valeurs dans S_1, on a

$$\frac{6S_1}{\sqrt{p}}=\frac{A+B}{C},$$

$$A=r'\left(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}+2r\sin^2\frac{1}{2}\theta\right)$$
$$\times\left(\sqrt{r'}-\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r}\right)\sqrt{r'},$$

$$B=r\left(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}+2r'\sin^2\frac{1}{2}\theta\right)$$
$$\times\left(\sqrt{r}-\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{r'}\right)\sqrt{r},$$

$$C=\left(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}\right)^{\frac{3}{2}}:$$

$$A+B=\left(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}\right)$$
$$\times\left[(r+r')^2-(r+r')\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}-2rr'\cos^2\frac{1}{2}\theta\right)$$
$$=\left(r+r'+\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr}\right)\left(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}\right)^2;$$

d'où

$$S_1=\frac{1}{6}\left(r+r_1+\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}\right)\sqrt{p\left(r+r'-2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}\right.}.$$

Observation. On parvient au même résultat en supposant φ et φ' de signes opposés.

Soit s la longueur de la corde qui joint les extrémités des rayons vecteurs r et r'; on a

$$2\cos\frac{1}{2}\theta\sqrt{rr'}=\pm\sqrt{(r+r')^2-s^2},$$

le signe supérieur lorsqu'on a $0<\theta<180$, et le signe inférieur pour $180 < \theta < 360$. Donc

$$S_1 = \frac{1}{12}\left[2(r+r') \pm \sqrt{(r+r')^2 - s^2}\right]$$

$$\times \sqrt{p\left[r+r' \mp \sqrt{(r+r')^2 - s^2}\right]}$$

$$\sqrt{r+r' \mp \sqrt{(r+r')^2 - s^2}}$$

$$= \left(\frac{r+r'+s}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \mp \left(\frac{r+r'-s}{2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

car

$$\sqrt{r+r') \mp \sqrt{(r+r')^2 - s^2}}$$

doit être positif.

Faisons

$$\frac{r+r'+s}{2} = d, \qquad \frac{r+r'-s}{2} = e,$$

on aura

$$S_1 = \frac{1}{6}\left[d + e \pm \left(\frac{de}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left[d \mp e\right]\sqrt{p},$$

d'où

$$S_1 = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{p}{2}}\left[d^{\frac{3}{2}} \mp e^{\frac{3}{2}}\right].$$

Telle est la belle expression de l'aire du secteur parabolique trouvée par Euler (*Miscell. Berolin.*, t. VII, p. 20). Mais Euler n'en a tiré aucun parti, et le théorème était tellement oublié, que Lambert croyait l'avoir découvert, ainsi qu'on le voit dans son ouvrage : *Insigniores orbitæ cometarum proprietates*, Aug. Vindelic., 1761, § 83, et dans ses *Beitrage*, partie III, p. 257, 1765, et depuis on a en effet attribué le théorème à Lambert. C'est M. Gauss qui a revendiqué les droits d'Euler (*Motus theoriæ planet.*, p. 119; 1809). Il est pourtant vrai que Lambert est le premier qui ait étendu le théorème à l'ellipse et à l'hyperbole.

M. Gentil, chef d'institution, a publié en 1854, chez

Mallet-Bachelier : *Démonstration d'un théorème de Lambert par la géométrie*, in-8 de 8 pages. Cette démonstration est fondée sur des théorèmes énoncés dans un programme de l'université de Dublin (*Nouvelles Annales*, 1847, t. VI, p. 450, n^{os} 5-12).