NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. ROCHETTE

Seconde solution de la question 361

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 333-336

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__333_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 361

(voir page 58),

PAR LE P. H. ROCHETTE, S. J.

On donne un angle trièdre de sommet S et deux points fixes A et B situés sur une droite passant par le sommet S. Par le plan B on mène un plan quelconque déterminant un tétraèdre T de volume V. Soit P le produit des volumes des quatre tétraèdres que l'on obtient en joignant le point A aux quatre sommets du tétraèdre T. On a la relation

$$\frac{P}{V^3} = \text{constante}.$$

(FAURE.)

Soient $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_6, y_6, z_6$ les coordonnées des points S, A, B, L, M, N; nous désignons par L, M, N les points où le plan mené par le point B rencontre les arêtes du trièdre. Les coordonnées des trois premiers points ainsi que les angles α, β, γ des arêtes avec les axes sont des quantités déterminées, et λ, μ, ν, qui représentent les longueurs SL, SM, SN, des quantités variables.

Les équations des arêtes seront

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x_4 - x_1}{\alpha_1} = \frac{y_4 - y_1}{\beta_1} = \frac{z_4 - z_1}{\gamma_1} = \lambda,\\ &\frac{x_5 - x_1}{\alpha_2} = \frac{y_5 - y_1}{\beta_2} = \frac{z_5 - z_1}{\gamma_2} = \mu,\\ &\frac{x_6 - x_1}{\alpha_3} = \frac{y_6 - y_1}{\beta_3} = \frac{z_6 - z_1}{\gamma_3} = \nu \end{aligned}\right.$$

Désignons par V_1, V_2, V_3, V_4 les volumes des pyramides SALM, SALN, SAMN, ALMN; nous aurons

$$6V_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix}$$

Remplaçons dans ce déterminant x_4, y_4, z_4, x_5, y_5, z_5 par leurs valeurs tirées des équations (1) et retranchons des éléments des trois dernières lignes ceux de la première, il viendra

$$6V_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ 0 & \lambda\alpha_1 & \lambda\beta_1 & \lambda\gamma_1 \\ 0 & \mu\alpha_2 & \mu\beta_2 & \mu\gamma_2 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda\mu \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \lambda\mu A;$$

on trouvera de même

$$6V_2 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \lambda\nu B$$

$$6V_3 = \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_2 - y_1 & z_3 - z_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \mu\nu C,$$

A, B, C représentant, comme on voit, des quantités connues.

On a enfin

$$6V_4 = \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \\ 1 & x_6 & y_6 & z_6 \end{vmatrix}$$

Si nous remplaçons x_4, y_4, z_4, x_5, y_5, z_5, x_6, z_6, z_6 par leurs valeurs tirées des équations (1), les éléments des trois dernières lignes du déterminant résulteront de la somme de deux quantités, ce qui nous permettra de le décomposer. Nous trouvons ainsi

$$6V_4 = -\lambda\mu A + \lambda\nu B - \mu\nu C + \lambda\mu\nu D,$$

en posant

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Cette transformation devient plus facile, si l'on a soin de retrancher les éléments ligne par ligne quand l'occasion s'en présente. D'un autre côté, les quatre points B, L, M, N étant dans un même plan, on a

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 \\ 1 & x_6 & y_6 & z_6 \end{vmatrix} = 0,$$

et, à cause des trois points S, A, B en ligne droite,

$$(3) \qquad \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \rho.$$

Le déterminant (2), à cause des équations (1), nous donne

$$- \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \lambda\mu\nu D = 0 \ (*).$$

(*) Il suffit pour obtenir cette relation de remplacer x_2, y_2, z_2 par x_3, y_3, z_3 dans le développement du déterminant qui représente $6V_4$.

On peut conclure de là, à cause des équations (3),

$$-\rho(-\lambda\mu A + \lambda\nu B - \lambda\mu\nu C) = \lambda\mu\nu D,$$

et, par conséquent,

$$6V_4 = \lambda\mu\nu\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) D.$$

Mais on a, comme on sait,

$$6V = \lambda\mu\nu D,$$

d'où, en combinant les relations obtenues,

$$\frac{P}{V^3} = \frac{\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) A.B.C.D}{6D^3},$$

quantité constante, puisqu'elle est indépendante des variables λ, μ, ν.