Nouvelles annales de mathématiques

Lebesgue

# Sur l'aire du triangle sphérique

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 16 (1857), p. 319-321

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__319_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

*Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques*

http://www.numdam.org/

## SUR L'AIRE DU TRIANGLE SPHÉRIQUE;

Par M. LEBESGUE.

Soient $a$, $b$, $c$ les côtés, A, B, C les angles et S la surface d'un triangle sphérique. L'équation

$$S = A + B + C - \pi$$

donne d'abord

$$\cos\frac{S}{2} = \sin\left(\frac{A+B+C}{2}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{c}{2} + \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{c}{2};$$

simplifiant par les valeurs de sin et cos de $\frac{A+B}{2}$, formule de Delambre, il vient d'abord

$$(1) \qquad \cos\frac{S}{2} = \frac{1}{\cos\frac{c}{2}}\left(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} + \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos C\right),$$

puis, en éliminant $\cos C$,

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \cos\frac{S}{2} &= \frac{\cos a + \cos b + \cos c + 1}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}} \\ &= \frac{\cos^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{b}{2} + \cos^2\frac{c}{2} - 1}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}. \end{aligned} \right.$$

Or on a

$$1 - (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) + 2\cos a \cos b \cos c$$

et

$$-1 + \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c$$

égaux respectivement à

$$4\sin\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b-c}{2}\right),$$

$$4\cos c\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\cos\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+b-c}{2}\right).$$

Il résulte de là que

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang}^2\frac{S}{4} &= \frac{1-\cos\frac{S}{2}}{1+\cos\frac{S}{2}} \\ &= \operatorname{tang}\left(\frac{a+b+c}{4}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{-a+b+c}{4}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{a-b+c}{4}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{a+b-c}{4}\right) \end{aligned} \right.$$

c'est la formule de Lhuilier.

Si l'on représente par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les arcs de grand cercle qui unissent les milieux des côtés $a$, $b$, $c$, on déduit de l'équation (1), à cause de

$$\cos\gamma = \cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} + \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos C,$$

les suivantes :

$$(4)\quad \begin{cases} \cos\gamma = \cos\dfrac{S}{2}\cos\dfrac{c}{2}, \\ \cos\beta = \cos\dfrac{S}{2}\cos\dfrac{b}{2}, \\ \cos\alpha = \cos\dfrac{S}{2}\cos\dfrac{a}{2}. \end{cases}$$

Si nous représentons par A′, B′, C′ les milieux des côtés $a$, $b$, $c$, on sait que le volume V′ du parallélipipède, dont les deux arêtes contiguës sont OA′, OB′, OC′ (O étant le centre de la sphère), est donné par l'équation

$$\begin{aligned} V'^2 &= 1 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\ &= 1 - \cos^2\frac{S}{2}\left(\cos^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{b}{2} + \cos^2\frac{c}{2}\right) \\ &\quad + 2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos^3\frac{S}{2}. \end{aligned}$$

Mais l'équation (2) donne

$$\cos^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{b}{2} + \cos^2\frac{c}{2} - 2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{S}{2} = 1;$$

de sorte qu'on a

$$(5)\qquad V'^2 = 1 - \cos^2\frac{S}{2} = \sin^2\frac{S}{2} \quad \text{ou} \quad V' = \sin\frac{S}{2}.$$

Ce théorème est de M. Cornélius Keogh, qui a fait d'ingénieuses recherches sur la trigonométrie.

Cette expression du volume V′ montre bien que le nom de sinus de l'angle solide OA′B′C′ donné à V′ est mal choisi. Il a été employé par M. Staudt, avec lequel M. Keogh s'est rencontré dans des recherches relatives aux polygones.

---