NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JULES BOURDIN

Problème combinatoire sur des plans passant par un système de points

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 313-316

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__313_1>

PROBLÈME COMBINATOIRE SUR DES PLANS PASSANT PAR UN SYSTÈME DE POINTS;

PAR M. JULES BOURDIN,
Elève du lycee Saint-Louis (classe de M Briot)

Etant donnés dans l'espace m points dont quatre ne sont pas dans le même plan, trouver le nombre des points nouveaux qui résultent de l'intersection des plans qu'on peut mener par les points donnés.

Le nombre des plans différents qui peuvent passer par les m points pris trois à trois, est donné par la formule

$$C_m^3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}.$$

Les intersections de ces plans trois à trois, s'ils étaient quelconques, seraient données, en représentant par M le nombre des plans, par la formule analogue

$$\frac{M(M-1)(M-2)}{1.2.3}. \tag{1}$$

Mais ces plans ont été menés par les m points donnés; la formule (1) énumère outre les points cherchés : 1° les points donnés, 2° des droites passant par les points donnés, 3° des points multiples.

De là trois corrections à faire subir à la formule (1), si l'on ne veut obtenir que les points nouveaux et ne compter chacun qu'une seule fois.

Première correction.

Par un des points donnés il passe autant de plans qu'on peut mener de droites par les $(m-1)$ points restants, c'est-à-dire $\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}$. Je désigne ce nombre par N; si je prends maintenant toutes les combinaisons de ces N points trois à trois, j'aurai le nombre des intersections qui se confondent avec le point donné. Ce nombre est $\frac{N(N-1)(N-2)}{1.2.3}$, la première correction sera donc

$$-m\frac{N(N-1)(N-2)}{1.2.3}.$$

Deuxième correction.

Il est à remarquer que dans le cas général pour qu'il passe plus de deux plans par une même droite, il faut que cette droite joigne deux des points donnés, a et b par exemple; la droite ab est alors l'intersection commune de $(m-2)$ plans dont les combinaisons trois à trois

$$\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}$$

sont comprises dans la formule, mais qui par la première correction ont été retranchées comme se confondant avec le point donné a; ces mêmes combinaisons ont également été retranchées comme se confondant avec le point b; il faudra donc comme deuxième correction ajouter le nombre

$$\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3}$$

autant de fois qu'on peut mener de droites par les m points donnés, c'est-à-dire $\frac{m(m-1)}{1.2}$ fois. La deuxième correction est donc

$$+\frac{m(m-1)}{1.2}\times\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3},$$

ou, en multipliant et divisant par 10,

$$+10\,\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}.$$

Troisième correction.

Nous avons vu plus haut que les droites qui joignent les points donnés deux à deux étaient les seules qui fussent formées par l'intersection de plus de deux plans. Les points multiples, c'est-à-dire ceux qui donnent les intersections de plus de trois plans, se trouveront donc par l'intersection de ces droites avec les plans menés par les $(m-2)$ points étrangers à la droite, pris trois à trois, et dont le nombre sera

$$\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3}.$$

On voit ainsi qu'il y aura sur chacune des $\frac{m(m-1)}{1.2}$ droites qui joignent les points deux à deux,

$$\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3}$$

points cherchés et qui chacun auront été comptés par la formule (1) autant de fois qu'il y a de combinaisons deux à deux des $(m-2)$ plans qui forment une droite, c'est-à-dire $\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}$ fois. La troisième et dernière correction sera donc

$$-\frac{m(m-1)}{1.2}$$

$$\times\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3}\left[\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}-1\right],$$

ou, en multipliant et divisant par 10,

$$-10\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}$$

$$\times\left[\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}-1\right].$$

Le nombre des points cherchés sera donc compris dans la formule

$$\frac{M(M-1)(M-2)}{1.2.3}-m\frac{N(N-1)(N-2)}{1.2.3}$$

$$-10\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}$$

$$\times\left[\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}-2\right],$$

en posant

$$M=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$$

et

$$N=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2}.$$

Note. Ce problème a déjà été traité dans le *Journal* de M. Liouville, t. V, p. 264, mais on n'a pas eu égard à la première et à la troisième correction.