

ADOLPHINE D

Solution de la question 386

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 288-290

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__288_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 586

(voir p. 183);

PAR M^{lle} ADOLPHINE D***.

Le produit de trois nombres entiers consécutifs ne peut être ni un carré, ni le double d'un carré.

I. J'appelle ces trois nombres A , $A + 1$, $A - 1$ et b^2 un carré. Je devrais avoir

$$A(A - 1)(A + 1) = b^2,$$

ou bien je puis écrire

$$(A^2 - 1)A = b^2.$$

Le nombres A et $A^2 - 1$ ne pouvant pas avoir de facteurs communs doivent être deux carrés, car ils doivent contenir tous leurs facteurs premiers à des puissances paires. Mais comme $A^2 - 1$ ne peut pas être un carré parfait, la relation précédente n'est donc pas possible.

On ne peut pas non plus satisfaire par des nombres entiers à la condition

$$(A - 1)(A)(A + 1) = 2b^2.$$

Pour le démontrer, je vais prouver que A ne pourrait être ni pair ni impair.

1°. Si l'on supposait A pair, la relation

$$A(A^2 - 1) = 2b^2$$

montrerait comme tout à l'heure que $A^2 - 1$ doit être un carré, ce qui est impossible.

2°. Si l'on supposait A impair, il aura la forme $2B + 1$. Il faudrait donc avoir, après les simplifications,

$$2B(B + 1)(2B + 1) = b^2;$$

B est premier avec $B + 1$ et avec $2B + 1$; $B + 1$ et $2B + 1$ sont premiers entre eux, car un facteur commun à ces deux nombres diviserait leur différence B , ce qui est impossible puisque B est premier avec $B + 1$.

Je vois donc par là que sur ces trois facteurs deux seraient des carrés, et le troisième multiplié par 2 serait aussi un carré. Il faut donc qu'une des combinaisons suivantes :

$$(1) \quad 2B, \quad B + 1, \quad 2B + 1,$$

$$(2) \quad 2(B + 1), \quad B, \quad 2B + 1,$$

$$(3) \quad 2(2B + 1), \quad B, \quad B + 1,$$

renferme trois carrés parfaits. Or cela est impossible, puisque dans chacune d'elles on trouve deux nombres entiers consécutifs : ainsi $2B$ et $2B + 1$ pour la première, $2B + 1$ et $2B + 2$ pour la deuxième et B et $B + 1$ pour la troisième. La relation

$$(A + 1)(A)(A - 1) = 2b^2$$

est donc impossible, et c'est ce que je voulais démontrer.

Note du Rédacteur. Cette bonne démonstration prouve également que le produit de trois nombres consécutifs ne peut être aucune puissance parfaite d'un nombre, et cela existe *probablement* pour le produit d'un nombre quelconque de nombres consécutifs.

Le théorème de M. Faure est démontré par Goldbach (*Corresp. math. et phys.*, t. II, p. 210). (PROUHEZ.)