DE SENARMONT

Note sur quelques formules propres à la détermination des trois indices principaux dans les cristaux biréfringents

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 273-285

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__273_0>

NOTE
Sur quelques formules propres à la détermination des trois indices principaux dans les cristaux biréfringents;

PAR M. DE SENARMONT.

§ 1. Lorsqu'il s'agit de déterminer les trois indices principaux d'un cristal biréfringent, on procède généralement de la manière suivante :

On taille trois prismes de façon que leurs arêtes soient parallèles aux trois axes principaux A, B, C d'élasticité optique. Avec chacun de ces prismes, on détermine facilement l'indice du rayon polarisé perpendiculairement à l'arête réfringente; ce rayon obéit en effet aux lois de Descartes, et si l'on observe le spectre correspondant, dans la position du minimum de déviation, on peut appliquer la formule qui conviendrait à un milieu monoréfringent.

L'indice ainsi déterminé est inversement proportionnel à la racine carrée de l'élasticité optique dans le sens de l'arête réfringente du prisme.

§ 2. Avec chacun de ces prismes, on peut encore observer un second spectre correspondant au rayon polarisé parallèlement à l'arête réfringente. Ce rayon n'obéit pas aux lois de Descartes, sa déviation est néanmoins susceptible d'un minimum. Or les lois connues de la double réfraction permettent d'établir une relation entre cette déviation minimum, l'angle du prisme, l'orientation de ses faces dans le cristal et les élasticités optiques suivant les deux axes principaux perpendiculaires à l'arête réfringente.

Soient a^2, b^2, c^2 les élasticités optiques parallèlement aux axes principaux A, B, C; soient α, β, γ les trois indices, de sorte que

$$\alpha = \frac{1}{a}, \quad \beta = \frac{1}{b}, \quad \gamma = \frac{1}{c}.$$

Soient A, B, C les angles des trois prismes dont les arêtes réfringentes sont respectivement parallèles aux axes principaux A, B, C.

Soient Δ'_0, Δ''_0, Δ'''_0 les déviations minima des rayons qui ont subi la réfraction ordinaire dans les trois prismes, Δ'_e, Δ''_e, Δ'''_e les déviations minima des rayons qui ont subi la réfraction extraordinaire; on posera, pour abréger,

$$D'_0 = A + \Delta'_0, \quad D''_0 = B + \Delta''_0, \quad D'''_0 = C + \Delta'''_0,$$
$$D'_e = A + \Delta'_e, \quad D''_e = B + A''_e, \quad D'''_e = C + \Delta'''_e.$$

Soient θ', θ'', θ''' les angles compris entre la bissectrice de l'angle réfringent du prisme et l'un des deux axes d'élasticité optique perpendiculaires à l'arête réfringente. (On comptera ces angles de facon que $\theta = 0$ ou $\theta = 90°$, selon que la bissextrice coïncide avec l'axe correspondant au coefficient d'élasticité écrit le premier ou le second dans les formules.)

On a les relations suivantes entre les coefficients d'élasticité et les données expérimentales obtenues avec chacun des trois prismes.

Premièrement. Pour les rayons polarisés normalement aux arêtes réfringentes et qui obéissent aux lois de Descartes :

$$(\text{M}) \qquad a = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{D'_0}{2}}, \quad b = \frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{D''_0}{2}}, \quad c = \frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{D'''_0}{2}}.$$

Secondement. Pour les rayons polarisés parallèlement aux arêtes réfringentes et qui obéissent aux lois de la réfraction extraordinaire :

$$
(\mathrm{N})\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left(\sin^2\frac{A}{2} - b^2\sin^2\frac{D'_e}{2}\right)\left(\cos^2\frac{A}{2} - c^2\cos^2\frac{D'_e}{2}\right)\cos^2\theta' \\
&+\left(\cos^2\frac{A}{2} - b^2\cos^2\frac{D'_e}{2}\right)\left(\sin^2\frac{A}{2} - c^2\sin^2\frac{D'_e}{2}\right)\sin^2\theta' = 0, \\
&\left(\sin^2\frac{B}{2} - c^2\sin^2\frac{D''_e}{2}\right)\left(\cos^2\frac{B}{2} - a^2\cos^2\frac{D''_e}{2}\right)\cos^2\theta'' \\
&+\left(\cos^2\frac{B}{2} - c^2\cos^2\frac{D''_e}{2}\right)\left(\sin^2\frac{B}{2} - a^2\sin^2\frac{D''_e}{2}\right)\sin^2\theta'' = 0, \\
&\left(\sin^2\frac{C}{2} - a^2\sin^2\frac{D'''_e}{2}\right)\left(\cos^2\frac{C}{2} - b^2\cos^2\frac{D'''_e}{2}\right)\cos^2\theta''' \\
&+\left(\cos^2\frac{C}{2} - a^2\cos^2\frac{D'''_e}{2}\right)\left(\sin^2\frac{C}{2} - b^2\sin^2\frac{D'''_e}{2}\right)\sin^2\theta''' = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Deux prismes différents suffisent donc généralement pour déterminer les trois coefficients d'élasticité (ou en d'autres termes les trois indices principaux); et même pour fournir, en plus, une relation de vérification entre ces coefficients.

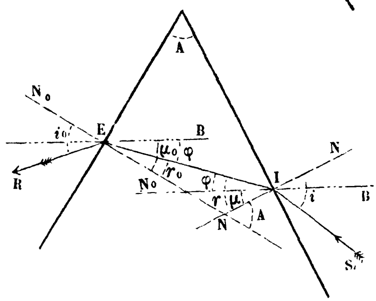
Si le cristal était à un seul axe optique, deux des trois quantités a, b, c deviendraient égales entre elles.

§ 3. Les formules (M) se déduisent par les procédés ordinaires des lois de Descartes. Quant aux formules (N), on peut les établir de la manière suivante :

Soit (*fig.* 1) le prisme, d'angle A, dont l'arête réfringente est parallèle à l'axe principal A. Les deux autres axes principaux B et C sont normaux à l'arête réfringente.

Soient BI, BE des droites parallèles à l'axe principal B; NI, N_0E les normales aux faces réfringentes; SI, ER les directions des normales aux ondes planes extérieures, incidente et émergente; IE la direction de la normale à l'onde plane intérieure réfractée.

FIG 1.



Désignons par φ l'angle que cette dernière normale fait avec l'axe principal B, par i, i_0 les angles d'incidence SIN, N_0ER; par r, r_0, les angles EIN, IEN_0; par μ, μ_0 les angles BIN, BEN_0.

On a les relations

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} i + i_0 = \Delta + A = D, \\ r + r_0 = A, \\ \left.\begin{array}{l}\varphi = r - \mu \\ \varphi = \mu_0 - r_0\end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} r = \varphi + \mu, \\ r_0 = \mu_0 - \varphi, \end{array}\right. \\ \mu_0 + \mu = A. \end{array}\right.$$

On posera

$$\mu_0 - \mu = B,$$

de sorte qu'on a

$$r_0 - r = B - 2\varphi.$$

Lorsqu'on prend pour unité la vitesse de propagation normale des ondes lumineuses dans le milieu extérieur au prisme, et que l'on désigne par v la même vitesse intérieure au milieu cristallisé, on a généralement

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1}{v}.$$

Mais quand la direction de cette dernière vitesse est perpendiculaire à l'axe principal A et fait un angle φ avec l'axe principal B, on a, par la théorie connue de la double réfraction,

$$v = \sqrt{b^2 \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\varphi},$$

de sorte que pour l'onde transmise au travers du prisme, on a à l'incidence et à l'émergence

$$(2)\quad \sin i = \frac{\sin r}{\sqrt{b^2 \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\varphi}},\quad \sin i_0 = \frac{\sin r_0}{\sqrt{b^2 \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\varphi}}.$$

Si l'on retranche et qu'on ajoute successivement ces équations membre à membre,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \sin\frac{i_0 - i}{2} &= \frac{1}{\cos\frac{D}{2}}\,\frac{\cos\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B}{2} - \varphi\right)}{\sqrt{b^2 \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\varphi}},\\ \cos\frac{i_0 - i}{2} &= \frac{1}{\sin\frac{D}{2}}\,\frac{\sin\frac{A}{2}\cos\left(\frac{B}{2} - \varphi\right)}{\sqrt{b^2 \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\varphi}}.\end{aligned}\right.$$

Carrant et ajoutant membre à membre,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos\varphi\left\{\begin{aligned} &\cos\varphi\left(\begin{aligned}&\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2} + \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{D}{2}\\ &- c^2\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2}\end{aligned}\right)\\ &+ \sin\varphi\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right)\end{aligned}\right\}\\ &+ \sin\varphi\left\{\begin{aligned} &\sin\varphi\left(\begin{aligned}&\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2} + \cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{D}{2}\\ &- b^2\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2}\end{aligned}\right)\\ &+ \cos\varphi\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right)\end{aligned}\right\}\end{aligned}\right\} = 0.$$

Mais dans le cas du minimum de déviation

$$\frac{d\Delta}{d\varphi}=\frac{d\mathrm{D}}{d\varphi}=0.$$

La dérivée par rapport à φ du premier membre de l'équation précédente est nulle, donc

$$
(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sin\varphi\left\{\begin{aligned}&\cos\varphi\left(\begin{aligned}&\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{D}{2}\\&-c^2\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2}\end{aligned}\right)\\&+\sin\varphi\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2}-\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right)\end{aligned}\right\}\\
&-\cos\varphi\left\{\begin{aligned}&\sin\varphi\left(\begin{aligned}&\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{D}{2}\\&-b^2\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2}\end{aligned}\right)\\&+\cos\varphi\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2}-\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right)\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right\}=0.
$$

En vertu des équations (4) et (5), il faut qu'on ait simultanément

$$
(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&\cos\varphi\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2}-\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right)\\
&=\sin\varphi\left[\begin{aligned}&b^2\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2}\\&-\left(\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2}\right)\end{aligned}\right],\\
&\sin\varphi\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\left(\sin^3\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2}-\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right)\\
&=\cos\varphi\left[\begin{aligned}&c^2\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2}\\&-\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right)\end{aligned}\right].
\end{aligned}\right.
$$

En multipliant entre elles les équations (6) membre à membre,

$$\begin{aligned}&b^2 c^2 \sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2}\\ &-b^2\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right)\\ &-c^2\left(\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{D}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{D}{2}\right)\\ &+\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}=0.\end{aligned}$$

Si l'on désigne par θ l'angle que la bissectrice du prisme fait avec l'axe principal B, on trouvera facilement sur la figure

$$\mu+90-\frac{A}{2}=\theta,\quad \mu_0+90^\circ-\frac{A}{2}=180^\circ-\theta,$$

donc

$$\mu_0-\mu=B=180^\circ-\theta,\quad \frac{B}{2}=90^\circ-\theta.$$

L'équation précédente devient alors

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}&b^2 c^2 \sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2}\\ &-b^2\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2}\sin^2\theta+\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\theta\right)\\ &-c^2\left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2}\cos^2\theta+\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\sin^2\theta\right)\\ &+\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}=0,\end{aligned}\right.$$

ou, sous une autre forme,

$$\begin{aligned}&\left(\sin^2\frac{A}{2}-b^2\sin^2\frac{D}{2}\right)\left(\cos^2\frac{A}{2}-c^2\cos^2\frac{D}{2}\right)\cos^2\theta\\ +&\left(\cos^2\frac{A}{2}-b^2\cos^2\frac{D}{2}\right)\left(\sin^2\frac{A}{2}-c^2\sin^2\frac{D}{2}\right)\sin^2\theta=0.\end{aligned}$$

En divisant les équations (6) membre à membre, on trouve

$$\operatorname{tang}^2\varphi = \frac{c^2\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2} - \left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2}\sin^2\theta + \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\theta\right)}{b^2\sin^2\frac{D}{2}\cos^2\frac{D}{2} - \left(\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D}{2}\cos^2\theta + \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D}{2}\sin^2\theta\right)},$$

$$= \frac{\sin^2\theta\cos^2\frac{D}{2}\left(c^2\sin^2\frac{D}{2} - \sin^2\frac{A}{2}\right) + \cos^2\theta\sin^2\frac{D}{2}\left(c^2\cos^2\frac{D}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\right)}{\sin^2\theta\sin^2\frac{D}{2}\left(b^2\cos^2\frac{D}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\right) + \cos^2\theta\cos^2\frac{D}{2}\left(b^2\sin^2\frac{D}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\right)}.$$

Lorsque la bissectrice de l'angle du prisme coïncide avec un des axes principaux, la formule précédente se simplifie. Elle se réduit, selon que $\theta = 0$ ou que $\theta = 90^\circ$, à

$$\left(\sin^2\frac{A}{2} - b^2\sin^2\frac{D}{2}\right)\left(\cos^2\frac{A}{2} - c^2\cos^2\frac{D}{2}\right) = 0$$

ou à

$$\left(\sin^2\frac{A}{2} - c^2\sin^2\frac{D}{2}\right)\left(\cos^2\frac{A}{2} - b^2\cos^2\frac{D}{2}\right) = 0.$$

Les premiers facteurs égalés de zéro déterminent b ou c et donnent

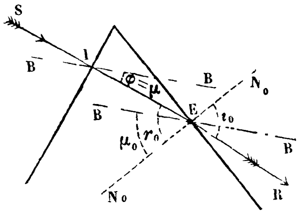
$$\operatorname{tang}\varphi = \infty \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang}\varphi = 0.$$

Quant aux seconds facteurs; ici, comme dans la recherche du minimum de déviation, avec les conditions propres aux milieux monoréfringents, ils répondraient à une question différente de celle qu'il s'agit de résoudre.

§ 4. On trouve des relations encore plus simples lorsque l'on observe le spectre émergent, non plus en plaçant le prisme dans la position du minimum de déviation, mais dans une situation telle, que le rayon incident rencontre normalement la face d'entrée.

La ligne SI est normale en même temps à l'onde plane extérieure incidente et à la face du prisme.

Fig 2.



ER est la normale à l'onde plane extérieure émergente; IE, prolongement de SI, est la normale à l'onde plane intérieure réfractée.

Si donc on conserve les mêmes notations qu'au § 3, on trouve

$$i = 0, \quad i_0 = \mathrm{D}, \quad r = 0, \quad r_0 = \mathrm{A}, \quad \varphi = \mu,$$

de sorte que les équations (2) deviennent

$$b^2 \sin^2 \mu + c^2 \cos^2 \mu = \frac{\sin^2 \mathrm{A}}{\sin^2 \mathrm{D}}.$$

Lorsque la face d'entrée est parallèle ou perpendiculaire à l'axe principal B,

$$b^2 = \frac{\sin^2 \mathrm{A}}{\sin^2 \mathrm{D}} \quad \text{ou} \quad c^2 = \frac{\sin^2 \mathrm{A}}{\sin^2 \mathrm{D}}$$

§ 5. On peut étendre les mêmes procédés d'observation et des formules analogues aux cristaux à un seul axe optique, même lorsque l'arête réfringente du prisme est dirigée d'une manière quelconque.

Il arrive alors que le rayon incident et le rayon émergent extraordinaire ne sont pas dans un même plan, mais restent tous deux parallèles à la section droite du prisme. Les ondes planes incidentes réfractée et émergente se coupent en effet toujours parallèlement à l'arête réfringente; de sorte que la normale IE (*fig.* 1) à l'onde plane réfractée est comprise dans le plan de la section droite.

Ce même plan contient de plus l'un des axes principaux B, en nombre infini, tous égaux entre eux et perpendiculaires à l'axe optique A. Soient BI, BE des parallèles à cet axe d'élasticité B. En conservant les notations précédentes, et en désignant en outre par π l'inclinaison de l'axe optique A sur l'arête réfringente, il est facile de voir que la vitesse de propagation normale de l'onde plane extraordinaire réfractée sera donnée par l'équation

$$v^2 = (b^2 \sin^2 \pi + a^2 \cos^2 \pi^2) \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi = k^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi.$$

On a donc comme précédemment

$$\sin i = \frac{\sin r}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi}}, \quad \sin^2 i_0 = \frac{\sin r_0}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi}}.$$

Le calcul s'achèvera de la même manière, et l'on aura, pour le rayon extraordinaire, dans le cas du minimum de déviation,

$$\begin{aligned} &\left(\sin^2 \frac{A}{2} - k^2 \sin^2 \frac{D}{2}\right)\left(\cos^2 \frac{A}{2} - a^2 \cos^2 \frac{D}{2}\right) \cos^2 \theta \\ + &\left(\cos^2 \frac{A}{2} - k^2 \cos^2 \frac{D}{2}\right)\left(\sin^2 \frac{A}{2} - a^2 \sin^2 \frac{D}{2}\right) \sin^2 \theta = 0, \end{aligned}$$

ou, sous une autre forme,

$$\begin{aligned} &a^2 k^2 \sin^2 \frac{D}{2} \cos^2 \frac{D}{2} \\ &- k^2 \left(\sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{D}{2} \sin^2 \theta + \cos^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{D}{2} \cos^2 \theta\right) \\ &- a^2 \left(\sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{D}{2} \cos^2 \theta + \cos^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{D}{2} \sin^2 \theta\right) \\ &+ \sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2} = 0. \end{aligned}$$

§ 6. Si dans ce cas encore le rayon incident rencontrait normalement la face d'entrée (*fig.* 2), on aurait

$$k^2 \sin^2 \mu + a^2 \cos^2 \mu = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 D}.$$

§ 7. Les angles μ, μ_0 sont respectivement égaux aux inclinaisons du plan, qui contient à la fois l'arête réfringente et l'axe optique unique, sur les faces d'entrée et de sortie; de sorte que si les données expérimentales sont les angles λ, λ_0, que l'axe optique fait avec les mêmes faces, on trouve sans difficulté

$$\sin \mu = \frac{\sin \lambda}{\sin \pi}, \quad \sin \mu_0 = \frac{\sin \lambda_0}{\sin \pi},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\tang \frac{A}{2}}{\tang \frac{B}{2}} = \frac{\tang \frac{\lambda_0 - \lambda}{2}}{\tang \frac{\lambda_0 + \lambda}{2}}, \quad \sin \pi = \frac{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{\lambda_0 + \lambda}{2} \cos \frac{\lambda_0 - \lambda}{2}} = \frac{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{\lambda_0 - \lambda}{2} \cos \frac{\lambda_0 + \lambda}{2}}.$$

§ 8. Les formules établies dans cette Note seront principalement utiles à l'étude optique des cristaux difficiles à tailler, mais dont quelques faces naturelles forment prisme, et offrent spontanément des arêtes réfringentes.

On se contentera de rapporter une application numérique de ces formules à des mesures prises sur un très-petit cristal de quartz, limité par une face de la pyramide et par une face du prisme hexagonal.

L'arête réfringente est normale à l'axe optique, de sorte que $\pi = 90°$, $k^2 = b^2$.

La formule précédente devient alors

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\frac{1}{b^2}\left(\sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{D_e}{2} \cos^2 \theta + \cos^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{D_e}{2} \sin^2 \theta\right) - \sin^2 \frac{D_e}{2} \cos^2 \frac{D_e}{2}}{\frac{1}{b^2} \sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2} - \left(\sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{D_e}{2} \sin^2 \theta + \cos^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{D_e}{2} \cos^2 \theta\right)} = \frac{P}{Q}.$$

L'angle réfringent du prisme...... $A = 38°.12'\ ''$

L'angle compris entre la bissectrice de l'angle du prisme et l'axe principal B.......................... $\theta = 70.53.30$

Les déviations mesurées pour la région du jaune, entre les raies D et E, sont.......................... $\Delta_o = 22.35$

$\Delta_e = 22.56$

On a donc.................... $D_o = 60.48$

$D_e = 61.\ 9$

Donc

$$\frac{1}{b} = \frac{\sin\frac{D_0}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = 1,5458$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{b^2}\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D_e}{2}\cos^2\theta = 0,020340 \\ \frac{1}{b^2}\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D_e}{2}\sin^2\theta = 0,492868 \end{array}\right\} 0,513208$$

$$\sin^2\frac{D_e}{2}\cos^2\frac{D_e}{2} = \qquad 0,191794$$

$$P = 0,321414$$

$$\frac{1}{b^2}\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2} = \qquad 0,228628$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{D_e}{2}\sin^2\theta = 0,070922 \\ \cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{D_e}{2}\cos^2\theta = 0,024755 \end{array}\right\} 0,095677$$

$$Q = 0,132951$$

$$\frac{1}{a} = \sqrt{\frac{P}{Q}} = 1,5548.$$

Or on a, d'après Rudberg :

Pour la raie D..... $\frac{1}{b} = 1,54418$, $\frac{1}{a} = 1,55328$

Pour la raie E..... $\frac{1}{b} = 1,54711$, $\frac{1}{a} = 1,55631$