NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BRIOSCHI

Sur l'hexagone inscriptible dans une conique, et solution de la question 369 (voir page 251)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 269-272

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__269_1>

SUR L'HEXAGONE INSCRIPTIBLE DANS UNE CONIQUE
Et solution de la question 369

(voir page 231);

D'APRÈS M. BRIOSCHI.

Soit l'hexagone 123456.

$r=0$ équation du côté 12
$s=0$ — 34
$t=0$ — 56

$\beta r + \alpha s + t = 0$ équation du côté 23
$r + \gamma s + \beta t = 0$ — 45
$\gamma r + s + \alpha t = 0$ — 61

Si ces relations subsistent, l'hexagone est inscriptible dans la conique ayant pour équation

$$r^2 + s^2 + t^2 \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) st + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) tr + \left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) rs = 0;$$

les équations des diagonales sont

(13) $\alpha\beta r + s + \alpha t = 0,$
(24) $r + \alpha\beta s + \beta t = 0,$
(35) $\beta r + \beta\gamma s + t = 0;$

(14) $\alpha r + \beta s + \alpha\beta t = 0,$
(25) $\alpha r + \alpha\gamma s + \gamma t = 0,$
(36) $\beta\gamma r + \beta s + \gamma t = 0;$

(15) $r + \gamma s + \alpha\gamma t = 0,$
(26) $\alpha\gamma r + \alpha s + t = 0,$
(46) $\gamma r + s + \beta\gamma t = 0.$

Soient

A l'intersection des côtés (34) et (56),
B — (12) et (56),
C — (34) et (12);

le point A étant déterminé par les équations

$$s = 0, \quad t = 0,$$

l'équation de la droite A 1 est de la forme

$$s + kt = 0;$$

mais le point (1) est déterminé par les équations

(12) $r = 0,$
(16) $\gamma r + s + \alpha t = 0;$

par conséquent,

$$k = \alpha;$$

on aura aussi

(A 1) $$s + \alpha t = 0,$$

(A 2) $$t + \alpha s = 0,$$

(B 3) $$t + \beta r = 0,$$

(B 4) $$r + \beta t = 0,$$

(C 5) $$r + \gamma s = 0,$$

(C 6) $$s + \gamma r = 0.$$

Soient les trois droites

$$s - t = 0, \quad t - r = 0, \quad r - s = 0.$$

La première droite passe par le point A et rencontre BC en a.

La deuxième droite passe par le point B et rencontre AC en b.

La troisième droite passe par le point C et rencontre AB en C.

Et les trois droites se coupent en un même point.

On en déduit que les cinq droites :

AB, AC, Aa, A 1, A 2 sont en involution, Aa est la droite double.

BC, BA, Bb, B 3, B 4 sont en involution, Bb est la droite double.

CA, CB, Cc, C 5, C 6 sont en involution, Cc est la droite double.

Si l'on suppose $\alpha\beta\gamma = 1$,

Les trois équations ci-dessus (13), (35), (15) se réduisent à la première, savoir

(1) $$\alpha\beta r + s + \alpha t = 0,$$

c'est-à-dire les points 1, 3, 5 sont sur la même droite donnée par l'équation (1); de même les points 2, 4, 6 sont sur la même droite donnée par l'équation

$$r + \alpha\beta s + \beta t = 0, \tag{2}$$

de sorte que l'hexagone est inscrit entre les deux droites (1) et (2), et l'équation de la conique se réduit au produit (1) (2) = 0; les équations (1) et (2) sont celles des deux droites R et S du problème Cayley.