

**Note sur la polaire réciproque d'une conique  
et d'une surface du second degré**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 16  
(1857), p. 264-266

<[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1857\\_1\\_16\\_\\_264\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__264_0)>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## NOTE

Sur la polaire réciproque d'une conique et d'une surface du second degré.

1. Soient données cette équation rendue homogène d'une conique

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 \\ \quad + a_{22} x_2^2 + 2a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2 = 0, \end{cases}$$

$\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$  sont les coordonnées courantes, et l'équation

$$\varphi = 0$$

rendue homogène de la conique directrice, l'équation de la polaire réciproque de la conique (1) est donnée par ce déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \frac{d\varphi}{dx_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \frac{d\varphi}{dx_2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \frac{d\varphi}{dx_3} \\ \frac{d\varphi}{dx_1} & \frac{d\varphi}{dx_2} & \frac{d\varphi}{dx_3} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$\frac{d\varphi}{dx_1}$  est la dérivée de  $\varphi$  relativement à  $x_1$ , etc., et où

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{32} = a_{23}, \quad a_{31} = a_{13};$$

car ce déterminant a pour résultat l'équation (a) du tome VII, page 413 des *Nouvelles Annales*.

*Observation.* Si

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

il suffit de remplacer dans le déterminant  $\frac{d\varphi}{dx_1}, \frac{d\varphi}{dx_2}, \frac{d\varphi}{dx_3}$  par  $x_1, x_2, x_3$  (voir Brioschi, *Théorie des Déterminants*, traduction française, p. 47). On a omis de dire que la directrice est

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

2. Soient données cette équation rendue homogène d'une surface du second degré

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{14} x_1 x_4 + a_{22} x_2^2 \\ \quad + 2 a_{23} x_2 x_3 + 2 a_{24} x_2 x_4 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{34} x_3 x_4 \\ \quad + a_{44} x_4^2 = 0, \end{array} \right.$$

$\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$  sont les coordonnées courantes, et l'équation

$$\varphi = 0$$

rendue homogène de la surface directrice.

L'équation de la polaire réciproque de la surface (2) est donnée par ce déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \frac{d\varphi}{dx_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \frac{d\varphi}{dx_2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \frac{d\varphi}{dx_3} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \frac{d\varphi}{dx_4} \\ \frac{d\varphi}{dx_1} & \frac{d\varphi}{dx_2} & \frac{d\varphi}{dx_3} & \frac{d\varphi}{dx_4} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{32} = a_{23}, \dots$$

*Observation.* Si

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$

il suffit de remplacer dans le déterminant  $\frac{d\varphi}{dx_1}, \frac{d\varphi}{dx_2}, \frac{d\varphi}{dx_3}, \frac{d\varphi}{dx_4}$  par  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

*Remarque.* Les fonctions *quadratiques* homogènes à  $n$  variables sont représentées par ce symbole

$$\sum_r \sum_s a_{r,s} x_r x_s,$$

en donnant à  $r$  et  $s$  toutes les valeurs de la suite 1, 2, 3, ...,  $n$  et posant

$$a_{sr} = a_{rs}.$$

Ainsi pour  $n = 3$ , on donne à  $r$  et  $s$  les valeurs successives 1, 2, 3 et l'on obtient l'équation (1).

Pour  $n = 4$ , on donne à  $r$  et  $s$  les valeurs successives 1, 2, 3, 4 et l'on obtient l'équation (2).

Une fonction quadratique homogène à  $n$  termes variables renferme donc  $\frac{n(n+1)}{2}$  termes.