NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JOSEPH SACCHI

Sur les aires des polygones inscrits ou circonscrits au cercle et à l'ellipse

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 259-260

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__259_0>

SUR LES AIRES DES POLYGONES INSCRITS OU CIRCONSCRITS AU CERCLE ET A L'ELLIPSE;

PAR M. LE DOCTEUR JOSEPH SACCHI.

Soient $\varphi(h_1, h_2, \ldots, h_x, \ldots, h_n)$ l'aire d'un polygone inscrit ou circonscrit à un cercle ayant pour rayon l'unité en fonction des droites h_x qui le déterminent; $l_1, l_2, \ldots, l_x, \ldots, l_n$ les droites analogues aux susdites et appartenant à un polygone analogue inscrit ou circonscrit à une ellipse ayant les demi-axes principaux a, b; λ_x le demi-diamètre parallèle à l_x. L'aire A de ce dernier polygone est

$$A = ab\,\varphi(r_1, r_2, \ldots, r_x, \ldots, r_n) \quad \text{ou} \quad r_x = \frac{l_x}{\lambda_x}.$$

Les applications sont nombreuses :

1°. L'aire d'un triangle inscrit dans un cercle ayant l'unité pour rayon étant

$$\varphi = \frac{h_1 h_2 h_3}{4},$$

l'aire d'un triangle inscrit dans l'ellipse ayant les demi-axes a, b sera

$$A = \frac{ab}{4} r_1 r_2 r_3,$$

c'est la formule de Mac-Cullagh; et comme l'on a aussi

$$\varphi = \sqrt{s(s-h_1)(s-h_2)(s-h_2)}$$

ou

$$2s = h_1 + h_2 + h_3,$$

ainsi l'on aura

$$A = ab\sqrt{t(t-r_1)(t-r_2)(t-r_3)}$$

ou

$$2t = r_1 + r_2 + r_3,$$

formule qui est due à mon ami le D[r] Brioschi (*Teorica dei determinanti,* p. 28; *Sopra alcuni teoremi di geometria,* Annali del Sig. Tortolini, 1853).

2°. Pour le triangle circonscrit au cercle, on a

$$\varphi = \frac{h_1 + h_2 + h_3}{2},$$

par conséquent, pour le triangle circonscrit à l'ellipse on aura

$$A = \frac{ab}{2}(r_1 + r_2 + r_3),$$

formule plus simple que celle qui a été trouvée par le D[r] Brioschi, *loco citato.*

Ainsi les aires φ_1, φ_2, φ_3 d'un quadrilatère inscrit, ou circonscrit à un cercle, inscrit et circonscrit simultanément à deux cercles étant

$$\varphi_1 = \sqrt{(s - h_1)(s - h_2)(s - h_3)(s - h_4)},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(dd_0)^2 - (h_1 h_3 - h_2 h_4)^2},$$

$$\varphi_3 = \sqrt{h_1 h_2 h_3 h_4}$$

où

$$2s = h_1 + h_2 + h_3 + h_4,$$

et d, d_0 sont les deux diagonales, on aura les aires d'un quadrilatère inscrit, circonscrit dans l'ellipse, inscrit dans l'ellipse des demi-axes ab et circonscrit à un autre qui est concentrique et homothétique à la première ainsi représentées

$$A_1 = ab\sqrt{(t - r_1)(t - r_2)(t - r_3)(t - r_4)},$$

$$A_2 = \frac{ab}{2}\sqrt{(rr_0)^2 - (r_1 r_3 - r_2 r_4)^2},$$

$$A_3 = \sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4}$$

où

$$2t = r_1 + r_2 + r_3 + r_4.$$