NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JOSEPH MARTELLI

Solution analytique de la question 361

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 255-258

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__255_1>

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION 361

(voir page 234);

PAR M. LE D[r] JOSEPH MARTELLI, DE MILAN.

On donne un angle trièdre de sommet S et deux points fixes A et B situés sur une droite passant par le sommet S. Par le point B, on mène un plan quelconque déterminant un tétraèdre T de volume V. Soit P le produit des volumes des quatre tétraèdres que l'on obtient en joignant le point A aux quatre sommets du tétraèdre T. On a la relation

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{V}^3} = \text{constante}.$$

Si nous désignons par x_s, y_s, z_s, x_a, y_a, z_a, x_b, y_b, z_b les coordonnées du sommet S et des deux points fixes A et B, celles des points B_1, B_2, B_3, où le plan mené par B coupe les arêtes du trièdre seront de la forme

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_s + \lambda h_1, & y_1 &= y_s + \lambda k_1, & z_1 &= z_s + \lambda l_1,\\
x_2 &= x_s + \mu h_2, & y_2 &= y_s + \mu k_2, & z_2 &= z_s + \mu l_2,\\
x_3 &= x_s + \nu h_3, & y_3 &= y_s + \nu k_3, & z_3 &= z_s + \nu l_3,
\end{aligned}$$

$h_1, k_1, l_1, h_2, k_2, l_2, h_3, k_3, l_3$ étant des quantités données; λ, μ,

$$\text{Tétraèdre } \mathrm{ASB_1B_2} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_s & y_s & z_s \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_a & y_a & z_a \end{vmatrix} = \frac{\lambda\mu}{6}\begin{vmatrix} x_a - x_s & y_a - \\ h_1 & k \\ h_2 & k \end{vmatrix}$$

$$\text{Tétraèdre } \mathrm{ASB_1B_3} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_s & y_s & z_s \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_a & y_a & z_a \end{vmatrix} = \frac{\lambda\nu}{6}\begin{vmatrix} x_a - x_s & y_a - \\ h_1 & k \\ h_3 & k \end{vmatrix}$$

$$\text{Tétraèdre } \mathrm{ASB_2B_3} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_s & y_s & z_s \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_a & y_a & z_a \end{vmatrix} = \frac{\mu\nu}{6}\begin{vmatrix} x_a - x_s & y_a - \\ h_2 & k \\ h_3 & k \end{vmatrix}$$

$$\text{Tétraèdre } \mathrm{AB_1B_2B_3} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_a & y_a & z_a \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_a - x_s & y_a - \\ h_1 & k_1 \\ h_2 & k_2 \\ h_3 & k_3 \end{vmatrix}$$

et

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_s & y_s & z_s \end{vmatrix} = \frac{\lambda\mu\nu}{6}\begin{vmatrix} h_1 & k_1 & l_1 \\ h_2 & k_2 & l_2 \\ h_3 & k_3 & l_3 \end{vmatrix} = \lambda\mu\nu\, N_{1,2,3}.$$

Or, puisque les points B, B_1, B_2, B_3 sont dans un même plan, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} x_b - x_s & y_b - y_s & z_b - z_s & \lambda\mu\nu \\ h_1 & k_1 & l_1 & \mu\nu \\ h_2 & k_2 & l_2 & \lambda\nu \\ h_3 & k_3 & l_3 & \lambda\mu \end{vmatrix} = 0;$$

mais les points S, A, B étant en ligne droite, on a aussi

$$\begin{vmatrix} 1 & x_s & y_s \\ 1 & x_a & y_a \\ 1 & x_b & y_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_s & z_s \\ 1 & x_a & z_a \\ 1 & x_b & z_b \end{vmatrix} = 0,$$

donc la relation précédente devient

$$\begin{vmatrix} x_a - x_s & y_a - y_s & z_a - z_s & \lambda\mu\nu\,\dfrac{x_a - x_s}{x_b - x_s} \\ h_1 & k_1 & l_1 & \mu\nu \\ h_2 & k_2 & l_2 & \lambda\nu \\ h_3 & k_3 & l_3 & \lambda\mu \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on a

$$\begin{vmatrix} x_a - x_s & y_a - y_s & z_a - z_s & \lambda\mu\nu \\ h_1 & k_1 & l_1 & \mu\nu \\ h_2 & k_2 & l_2 & \lambda\nu \\ h_3 & k_3 & l_3 & \lambda\mu \end{vmatrix}$$

$$= \lambda\mu\nu \frac{x_b - x_a}{x_b - x_s} \begin{vmatrix} h_1 & k_1 & l_1 \\ h_2 & k_2 & l_2 \\ h_3 & k_3 & l_3 \end{vmatrix} = 6\lambda\mu\nu \frac{x_b - x_a}{x_b - x_s} \mathrm{N}_{1,2,3},$$

et, par suite,

$$\text{Tétraèdre AB}_1\text{B}_2\text{B}_3 = \lambda\mu\nu \frac{x_b - x_a}{x_b - x_s} \mathrm{N}_{1,2,3}.$$

Nous aurons ainsi

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{V}^3} = \frac{(x_b - x_a)\,\mathrm{M}_{1,2}\,\mathrm{M}_{1,3}\,\mathrm{M}_{2,3}}{(x_b - x_s)\,\mathrm{N}^2_{1,2,3}}$$

quantité indépendante de λ, μ, ν. Donc on a en effet

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{V}^3} = \text{constante}.$$

Observation. On peut de même très-facilement démontrer pour un angle plan un théorème analogue aux précédents, c'est-à-dire : Dans un angle plan de sommet S, on donne deux points fixes A, B situés sur une droite passant par le sommet S. Par le point B, on mène une droite quelconque déterminant un triangle T d'aire E. Soit P le produit des aires des trois triangles que l'on obtient en joignant A aux trois sommets du triangle T. On a la relation

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}^2} = \text{constante}.$$

Note du Rédacteur. M. Mannheim fait observer que le théorème de M. Faure s'obtient en exprimant par le procédé des polaires réciproques que des tétraèdres de même base et de hauteurs égales sont équivalents, une sphère étant la surface directrice.