Nouvelles annales de mathématiques

E. Combescure

Solution de la question 312

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 253-255

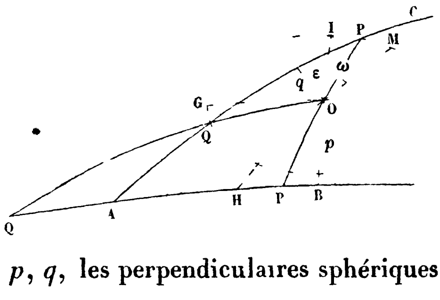
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__253_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 312

(voir tome XIV, page 305)

PAR M. E. COMBESCURE,
Professeur à Montpellier

Mener par un point donné dans un angle sphérique un arc de grand cercle tel, que le rapport des sinus des deux segments soit égal à une quantité donnée.



Soient p, q, les perpendiculaires sphériques abaissées d'un point O pris dans l'intérieur d'un angle sphérique CAB sur les côtés de cet angle. Menons dans une direction quelconque un arc de grand cercle HOM, faisant un angle ω avec le prolongement OI de p, et prenons sur cet arc un point M tel, que

$$\frac{\sin \mathrm{OM}}{\sin \mathrm{OH}} = \frac{\sin \mathrm{OI}}{\sin p},$$

ou, en faisant $\mathrm{OM} = \rho$, $\mathrm{OH} = \delta$, $\mathrm{OI} = \beta$,

$$\frac{\sin \rho}{\sin \delta} = \frac{\sin \beta}{\sin p},$$

β désignant un angle donné que je supposerai plus petit que p.

Le triangle HOB donnant

$$\cot \delta = \cot p \cos \omega,$$

l'élimination de δ entre cette équation et la précédente fournit, en prenant $\sin \alpha = \dfrac{\sin \beta}{\sin p}$,

$$\frac{1}{\sin^2 \rho} = \frac{\sin^2 \omega}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \omega}{\sin^2 \beta}$$

ou

$$\cot^2 \rho = \cot^2 \alpha \sin^2 \omega + \cot^2 \beta \cos^2 \omega,$$

équation du lieu des points M et qui appartient à une conique sphérique ayant son centre en O et pour demi-axes $\mathrm{OI} = \beta$, $\mathrm{OG} = \alpha$. Cette courbe coupe le côté AC en deux points P et Q qui, étant joints au point O, donneront

$$\frac{\sin \mathrm{OP}}{\sin \mathrm{OP'}} = \frac{\sin \mathrm{OQ}}{\sin \mathrm{OQ'}} = \frac{\sin \beta}{\sin p} = \sin \alpha$$

et résolvent la question.

La détermination analytique des points P et Q n'offre aucune difficulté. Si l'on désigne, en effet, par ε l'angle de q avec le prolongement de p, le grand cercle AC a pour équation

$$\cot \rho = \cot q \cos(\omega + \varepsilon).$$

L'élimination de ρ entre cette équation et celle de la conique se fait immédiatement et conduit à une équation du second degré par rapport à $\tan g\,\omega$ qui fait connaître les angles polaires POI, QOI, et, par suite, OP, OQ.