NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BOYELDIEU
A. SYLVESTRE

Solution de la question 354

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 24-25
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__24_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 334

(voir t. XV, p. 464);

PAR MM. BOYELDIEU ET A. SILVESTRE,
Élèves de M. Catalan.

On donne quatre droites $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ et un point O dans leur plan : on joint ce plan au point d'intersection de $A = 0$ et $B = 0$, et l'on prend la conjuguée harmonique de cette droite par rapport au système (A, B); on fait de même par rapport au système (C, D). Ces deux droites se coupent en un point (1). On opère de même par rapport aux systèmes (A, C) et (B, D), puis (A, D) et (B, C). On obtient ainsi deux nouveaux points d'intersection (2) et (3) en ligne droite avec le premier.

Démonstration.

Si A_1, B_1, C_1, D_1 sont les valeurs que prennent les premiers membres des équations de nos droites quand on y remplace les coordonnées variables par celles du point O,

$$\frac{A}{A_1} - \frac{B}{B_1} = 0$$

sera la forme de l'équation des droites joignant le point O aux points d'intersection des droites données.

On sait d'ailleurs que les deux droites $P + \lambda Q = 0$, $P - \lambda Q = 0$ sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux droites $P = 0$ et $Q = 0$.

Ceci étant, les équations de nos conjuguées harmoniques pourront se mettre sous la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{A}{A_1}+\frac{B}{B_1}=0,\\ &\frac{C}{C_1}+\frac{D}{D_1}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{A}{A_1}+\frac{C}{C_1}=0,\\ &\frac{B}{B_1}+\frac{D}{D_1}=0,\end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{A}{A_1}+\frac{D}{D_1}=0,\\ &\frac{B}{B_1}+\frac{C}{C_1}=0,\end{aligned}\right.$$

d'où l'on voit immédiatement que la droite

$$\frac{A}{A_1}+\frac{B}{B_1}+\frac{C}{C_1}+\frac{D}{D_1}=0$$

passe par les trois points d'intersection dont il s'agit.

Note. Un abonné de Marseille fait observer que dans un quadrilatère plan les droites qui joignent les milieux des côtés opposés et les droites qui joignent les milieux des deux diagonales se coupent en un même point. La perspective de cette figure donne le théorème 353 dont le théorème 354 est le corrélatif. L'élégant mode de solution de MM. Boyeldieu et Silvestre s'applique avec un égal succès au théorème 353.