

BRIOSCHI

Solution de la question 350 (Wronski)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16 (1857), p. 248-249

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__248_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 350 (WRONSKI)

(voir t. XV, p. 407);

PAR M. BRIOSCHI (*),

Professeur à l'université de Pavie.

Étant donnée une fonction homogène complète de degré r entre n variables, racines d'une équation de degré n également donnée, les coefficients numériques de la fonction étant tous égaux à l'unité, trouver la valeur de la fonction exprimée en fonction des coefficients de l'équation.

Soient x_1, x_2, \dots, x_n les racines de l'équation

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

La fonction homogène qui a les propriétés énoncées sera évidemment le coefficient de z^r dans le développement suivant les puissances ascendantes de z de l'expression

$$\frac{1}{(1 - x_1 z)(1 - x_2 z) \dots (1 - x_n z)} = \frac{1}{\varphi(z)}.$$

Or, en posant

$$\frac{1}{\varphi(z)} = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots,$$

on a

$$-\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{A_1 + 2A_2 z + 3A_3 z^2 + \dots}{1 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots};$$

mais

$$-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{x_1}{1 - x_1 z} + \frac{x_2}{1 - x_2 z} + \dots + \frac{x_n}{1 - x_n z}$$

(*) L'illustre analyste est disciple et successeur de M. Bordoni, auteur de plusieurs ouvrages très-estimés en Italie et nullement connus au dehors de cette contrée toujours féconde en hommes de talent et digne de meilleures destinées

et

$$\frac{1}{1 - x_r z} = 1 + x_r z + x_r^2 z^2 + \dots;$$

en conséquence on aura

$$(1) \quad s_1 + s_2 z + s_3 z^2 + \dots = \frac{A_1 + 2A_2 z + \dots}{1 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots},$$

où

$$s_r = x_1^r + x_2^r + \dots + x_n^r.$$

L'équation (1) nous donne les suivantes :

$$A_1 = s_1,$$

$$2A_2 = s_2 + A_1 s_1,$$

$$3A_3 = s_3 + A_1 s_2 + A_2 s_1,$$

.....

$$rA_r = s_r + A_1 s_{r-1} + A_2 s_{r-2} + \dots + A_{r-1} s_1,$$

lesquelles multipliées par $a_{r-1}, a_{r-2}, \dots, a_0$ donnent, en les sommant,

$$\begin{aligned} & ra_0 A_r + (r-1) a_1 A_{r-1} + \dots + A_1 a_{r-1} \\ &= - (a_1 A_{r-1}) + 2a_2 A_{r-2} + \dots + ra_r, \end{aligned}$$

d'où

$$a_0 A_r + a_1 A_{r-1} + \dots + a_{r-1} A_1 + a_r = 0.$$

On en déduit

$$A_r = \frac{(-1)^r}{a_0^r} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_r & a_{r-1} & a_{r-2} & \dots & a_1 \end{vmatrix} \quad (*)$$

(*) Nous engageons les élèves à faire $n = 2$; tout devient intuitif, et la belle démonstration du célèbre analyste subsiste pour n quelconque.