

P. SAUZE

Solution analytique de la question 357 (Michael Roberts)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 243-247

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__243_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION 357
(MICHAEL ROBERTS)

(voir t. XVI, p. 57);

PAR M. L'ABBÉ P. SAUZE,
Professeur au collège libre de Mende (Lozère).

D'un point quelconque M, on mène à une conique E deux sécantes qui la coupent en A et B, en C et D.

Si l'on a

$$(1) \quad \frac{AB}{MA \cdot MB} = \frac{CD}{MC \cdot MD},$$

toute conique E' ayant les mêmes foyers FF' que la première, sera coupée par les sécantes en des points A' et B', C' et D' tels, que l'on aura ainsi

$$(2) \quad \frac{A'B'}{MA' \cdot MB'} = \frac{C'D'}{MC' \cdot MD'}.$$

Prenons pour axes coordonnés les sécantes MB, MD. L'équation de la conique E, rapportée à ces axes, sera de la forme

$$(3) \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Dans cette équation, si l'on désigne par x' , x'' les valeurs de x pour $y = 0$ et par y' , y'' les valeurs de y quand $x = 0$, la relation (1) nous conduit à

$$\frac{x' - x''}{x' x''} = \frac{y' - y''}{y' y''}$$

qui entraîne la suivante entre les coefficients

$$(4) \quad d^2 - 4af = e^2 - 4cf (*).$$

Soit maintenant

$$A^2 y' + B^2 x^2 - A^2 B^2 = 0$$

l'équation de notre conique E rapportée à son centre et à ses axes; en appelant α , β les angles de MB, MD avec le grand axe, et P, Q les coordonnées de M relatives à ces axes, le retour aux axes obliques transformera cette équation en celle-ci :

$$(5) \quad \begin{cases} B^2 (p + x \cos \alpha + y \cos \beta) \\ + A^2 (q + x \sin \alpha + y \sin \beta)^2 - A^2 B^2 = 0. \end{cases}$$

En identifiant cette équation avec l'équation (3), on aura

$$\begin{aligned} a &= A^2 \sin^2 \alpha + B^2 \cos^2 \alpha, \\ c &= A^2 \sin^2 \beta + B^2 \cos^2 \beta, \\ d &= 2 A^2 q \sin \alpha + 2 B^2 p \cos \alpha, \\ e &= 2 A^2 q \sin \beta + 2 B^2 p \cos \beta, \\ f &= p^2 B^2 + q^2 A^2 - A^2 B^2. \end{aligned}$$

(*) Soit $cy^2 + ey + f = 0$, l'équation inverse est $fy^2 + ey + c = 0$; le carré de la différence des racines est $\frac{e^2 - 4cf}{4f^2}$; donc, etc Tm.

Dès lors la relation (4) deviendra

$$\begin{aligned} & 8pq A^2 B^2 \sin \alpha \cos \alpha + A^2 B^2 (A^2 \sin^2 \alpha + B^2 \cos^2 \alpha) \\ & \quad - A^2 B^2 (p^2 \sin^2 \alpha + q^2 \cos^2 \alpha) \\ = & 8pq A^2 B^2 \sin \beta \cos \beta + A^2 B^2 (A^2 \sin^2 \beta + B^2 \cos^2 \beta) \\ & \quad - A^2 B^2 (p^2 \sin^2 \beta + q^2 \cos^2 \beta) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & 4pq (\sin 2\alpha - \sin 2\beta) \\ & + (\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta)(A^2 - B^2 + q^2 - p^2) = 0. \end{aligned}$$

Si la quantité $A^2 - B^2$ reste constante, cette équation ne cessera pas d'avoir lieu quelles que soient les valeurs particulières de A et de B.

On voit donc que la conique E' , homofocale à la conique E, sera coupée par les sécantes en des points A' et B' , C' et D' tels, que

$$\frac{A' B'}{MA' \cdot MB'} = \frac{C' D'}{MC' \cdot MD'}$$

c. q. f. d.

Si du point M on menait des tangentes à la conique E, ces tangentes seraient évidemment dans le cas des sécantes MB, MD; dès lors, en appelant $(A_1 B_1)$ $(C_1 D_1)$ leurs points d'intersection avec une conique E_1 , homofocale à E, on aurait

$$\frac{A_1 B_1}{MA_1 \cdot MB_1} = \frac{C_1 D_1}{MC_1 \cdot MD_1},$$

c'est-à-dire, conformément à l'énoncé de la question 357,

$$\frac{1}{MA_1} + \frac{1}{MB_1} = \frac{1}{MC_1} + \frac{1}{MD_1}$$

ou

$$\frac{1}{MA_1} - \frac{1}{MB_1} = \frac{1}{MC_1} - \frac{1}{MD_1},$$

selon la position de M.

La méthode analytique que nous avons suivie nous

permettrait de démontrer très-simplement que si deux sécantes issues d'un point M coupent une conique en des points A et B, C et D satisfaisant aux relations ci-dessus, un système de deux autres sécantes ayant même point de concours et mêmes bissectrices que les premières déterminera sur la conique des points A' et B', C' et D' pour lesquels auront lieu les mêmes relations.

Le théorème contenu dans la question 357 nous permet d'établir la proposition suivante :

Deux coniques étant homofocales, les surfaces engendrées par leur révolution autour de leur axe principal seront telles, que tous les plans tangents à l'une couperont l'autre suivant des coniques ayant même paramètre.

Soient les deux ellipses homofocales E, E'. Imaginons qu'elles résultent de la section de deux ellipsoïdes homofocaux de révolution par un plan mené suivant le grand axe.

Les tangentes MT, MT' (qui se coupent en M dans l'intérieur de E') nous représenteront les traces sur le plan de la figure, de deux plans ayant avec l'ellipsoïde inférieur un point de contact sur le méridien d'intersection.

Ces deux plans couperaient la surface E' suivant deux ellipses dont AB, CD (segments compris dans l'intérieur de E') seraient les grands axes. Représentons par a , a' les demi-longueurs de ces axes, par b , b' celles des petits axes, et appelons MN la perpendiculaire élevée en M au plan de la figure dans l'ellipsoïde E'.

Cette perpendiculaire, qui, pour chaque ellipse, serait une ordonnée perpendiculaire au grand axe, nous donnerait

$$MN^2 = \frac{b^2}{a^2} (MA \cdot MB) = \frac{b'^2}{a'^2} (MC \cdot MD),$$

d'où

$$\frac{b^2}{a} \left(\frac{MA \cdot MB}{a} \right) = \frac{b'^2}{a'} \left(\frac{MC \cdot MD}{a'} \right);$$

or

$$\frac{MA \cdot MB}{a} = \frac{MC \cdot MD}{a'},$$

donc

$$\frac{b^2}{a} = \frac{b'^2}{a'}.$$

C. Q. F. D.

Cette démonstration faite avec mes deux ellipsoïdes se ferait évidemment avec toutes les surfaces du second ordre.

Nous avons supposé les tangentes T et T' se coupant dans l'intérieur de l'ellipse E'. Si cela n'avait pas lieu, on pourrait mener une série de plusieurs tangentes dont les premières feraient partie, et qui seraient telles, que leurs points consécutifs d'intersection seraient dans l'intérieur de E', ce qui permettrait de compléter la démonstration.

Note. On déduit de cette question le théorème suivant :

Étant données deux coniques homofocales, l'une fixe C, l'autre variable C', on mène à C' deux tangentes T, T', parallèlement à deux directions données, ces tangentes coupent C aux points A, B, A', B'; on a, quelle que soit C',

$$\frac{AB}{A'B'} = \text{constante.}$$

(MANNHEIM.)