Nouvelles annales de mathématiques

Gerono

Démonstration d'une formule dont on peut déduire, comme cas particulier, le binôme de Newton

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 237-240

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__237_0>

DÉMONSTRATION
D'une formule dont on peut déduire, comme cas particulier, le binôme de Newton.

Soient x, a, b *des quantités quelconques, et* m *un nombre* entier *et positif, on aura*

$$(1)\left\{\begin{aligned}(x+a)^m &= x^m + m.a(x+6)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}\cdot a(a-26)(x+26)^{m-2}+\ldots\\ &+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}a(a-n6)^{n-1}(x+n6)^{m-n}+\ldots\\ &+ma[a-(m-1)6]^{m-2}[x+(m-1)6]+a(a-m6)^{m-1}.\end{aligned}\right.$$

Cette formule, que l'on doit à Abel (*), a été démontrée dans l'un des Traités d'Algèbre *conformes au programme officiel;* nous allons faire connaître une autre démonstration qui est, sauf quelques modifications de peu d'importance, celle qu'Abel a donnée.

Remarquons d'abord que l'égalité (1) est évidente quand $m=1$, puisqu'elle se réduit alors à

$$x+a=x+a.$$

Elle est encore immédiatement vérifiée lorsque $m=2$, car, dans ce cas, elle devient

$$(x+a)^2 = x^2+2a(x+6)+a(a-26) = x^2+2ax+a^2.$$

Il ne reste donc plus qu'à faire voir que si l'égalité (1) est vraie pour une certaine valeur particulière de m, elle existe encore lorsqu'on augmente cette valeur d'une unité. Ainsi, en supposant que m représente un nombre entier positif, pour lequel l'exactitude de l'égalité (1) ait été

(*) *Œuvres complètes*, t. I, p. 31

constatée, il s'agit de prouver qu'on a

$$(2)\left\{\begin{aligned}(x+a)^{m+1} &= x^{m+1}+(m+1)a(x+\beta)^m+\frac{(m+1)m}{1.2}a(a-2\beta)(x+2\beta)^{m-1}+\ldots\\ &+\frac{(m+1)m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots n}a(a-n\beta)^{n-1}(x+n\beta)^{m-n+1}+\ldots\\ &+(m+1)a(a-m\beta)^{m-1}(x+m\beta)+a[a-(m+1)\beta]^m.\end{aligned}\right.$$

Pour abréger l'écriture, nous désignerons par $f(x)$ le second membre de l'égalité (1) qui existe par hypothèse, et nous nommerons $\varphi(x)$ le second membre de l'égalité (2) qu'il s'agit d'établir.

En prenant les dérivées par rapport à x des deux fonctions $(x+a)^{m+1}$ et $\varphi(x)$, on trouve

$$(m+1)(x+a)^m \quad \text{et} \quad (m+1)f(x).$$

Mais

$$(x+a)^m = f(x),$$

par hypothèse : donc, les deux dérivées obtenues sont égales entre elles, et, par conséquent, les deux fonctions primitives $(x+a)^{m+1}$, $\varphi(x)$ ne peuvent différer que par une constante, c'est-à-dire qu'on a nécessairement l'égalité

$$(3) \qquad (x+a)^{m+1} = \varphi(x) + \mathrm{C},$$

en désignant par C une quantité indépendante de x.

Pour déterminer la valeur de la constante C, nous remarquerons que si l'on multiplie par $(m+1)\beta$, les termes x^m, $ma(x+\beta)^{m-1}$, etc., de $f(x)$, et qu'on ajoute respectivement aux produits résultant de ces multiplications les termes x^{m+1}, $(m+1)a(x+\beta)^m$, etc., de $\varphi(x)$, on obtiendra des sommes qui admettront chacune comme facteur le binôme $x+(m+1)\beta$. En effet on a

$$(m+1)\beta.x^m + x^{m+1} = x^m[x+(m+1)\beta];$$

et

$$m(m+1)6\,a(x+6)^{m-1}+(m+1)a.(x+6)^m$$
$$=(m+1)a(x+6)^{m-1}[x+(m+1)6];$$

et, en général, la somme

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}a(a-n6)^{n-1}(x+n6)^{m-n}\times(m+1)6$$
$$+\frac{(m+1)m(m-1).(m-n+2)}{1.2.3\ldots n}a(a-n6)^{n-1}(x+n6)^{m-n+1}$$

est égale à

$$\frac{(m+1)m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots n}a(a-n6)^{n-1}(x+n6)^{m-n}[x+(m+1)6].$$

De cette remarque, nous concluons que si l'on multiplie par $(m+1)6$ les deux membres de l'égalité (1)

$$(x+a)^m=f(x)$$

et qu'on ajoute l'égalité qui en résulte

$$(m+1)6(x+a)^m=(m+1)6f(x),$$

membre à membre avec (3)

$$(x+a)^{m+1}=\varphi(x)+\mathrm{C},$$

on aura, en désignant par $\psi(x)$ un polynôme entier par rapport à x,

$$(m+1)6(x+a)^m+(x+a)^{m+1}$$
$$=\psi(x)\times[x+(m+1)6]+a[a-(m+1)6]^m+\mathrm{C};$$

ou, parce que

$$(m+1)6(x+a)^m+(x+a)^{m+1}$$
$$=[x+a+(m+1)6](x+a)^m,$$

on aura

$$(4)\left\{\begin{array}{l}[x+a+(m+1)6](x+a)^m\\=\psi(x)\times[x+(m+1)6]+a[a-(m+1)6]^m+\mathrm{C}.\end{array}\right.$$

Cela posé, si dans cette dernière égalité on remplace

x par $-(m+1)\beta$, il vient

$$a[a-(m+1)\beta]^m = a[a-(m+1)\beta]^m + C,$$

d'où

$$C = 0.$$

Par conséquent, on a

$$(x+a)^{m+1} = \varphi(x).$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

En posant $\beta = 0$, la formule (1) donne le développement de la puissance m d'un binôme $(x+a)$.

Nous examinerons prochainement d'autres applications de cette formule. G.