MARECHAL

Solution de la question 361

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 234-236

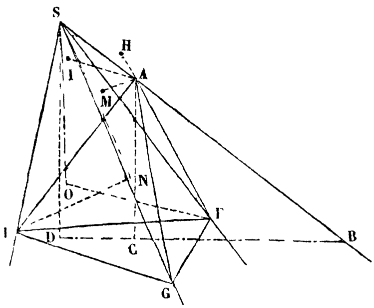
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__234_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 361

(voir t. XVI, p. 58);

PAR M. MARECHAL,
Élève de l'institution Loriol.

On donne un angle trièdre de sommet S et deux points fixes A et B situés sur une droite passant par le sommet S. Par le point B on mène un plan quelconque détermi-



nant un tétraèdre T, de volume V. Soit P le produit des volumes des quatre tétraèdres que l'on obtient en joignant le point A aux quatre sommets du tétraèdre T.

On a la relation

$$\frac{P}{V^3} = \text{constante}.$$

Il faut prouver que la valeur de

$$\frac{\frac{1}{3}\text{EGF} \times \text{AC} \times \frac{1}{3}\text{SGF} \times \text{AM} \times \frac{1}{3}\text{SEG} \times \text{AI} \times \frac{1}{3}\text{SEF} \times \text{AH}}{\left(\frac{1}{3}\right)^3 \overline{\text{EGF}}^3 \times \overline{\text{SD}}^3}$$

est une quantité constante.

Supprimant les facteurs communs constants, il reste à prouver que le rapport

$$\frac{AC \times SGF \times SEG \times SEF}{\overline{EGF}^2 \times \overline{SD}^3}$$

est constant.

Les deux droites SD et AC étant parallèles, le point C se trouvera sur BD. Les deux triangles semblables SDB, ACB donnent

$$\frac{AC}{SD} = \frac{AB}{SB},$$

d'où

$$AC = SD \times \frac{AB}{SB}.$$

Remplaçant dans le rapport précédent AC par sa valeur, ce rapport devient

$$\frac{SD \times \frac{AB}{SB} \times SGF \times SEF \times SEG}{\overline{EGF}^2 \times \overline{SD}^3}.$$

Supprimant le facteur commun et laissant de côté le facteur constant $\frac{AB}{SB}$, il reste à prouver que le rapport

$$\frac{SGF \times SEG \times SEF}{\overline{EGF}^2 \times \overline{SD}^2}$$

est constant.

Or,

$$EGF \times SD = SGF \times EN,$$
$$EGF \times SD = SEG \times OF.$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$\overline{EGF}^2 \times \overline{SD}^2 = SGF \times EN \times SEG \times OF.$$

Remplaçant dans le rapport précédent $\overline{EGF}^2 \times \overline{SD}^2$ par sa valeur, il devient

$$\frac{\text{SGF} \times \text{SEG} \times \text{SEF}}{\text{SGF} \times \text{SEG} \times \text{EN} \times \text{OF}},$$

et il reste à prouver que le rapport $\frac{\text{SEF}}{\text{EN} \times \text{OF}}$ est constant.

Or,

$$\text{SEF} = \frac{1}{2}\,\text{SE} \times \text{SF} \times \sin \text{ESF};$$

$$\text{EN} = \text{ES} \times \cos \text{SEN},$$

$$\text{OF} = \text{FS} \times \cos \text{SFO}.$$

Multipliant ces deux égalités membre à membre, on trouve

$$\text{EN} \times \text{OF} = \text{ES} \times \cos \text{SEN} \times \text{FS} \times \cos \text{SFO};$$

donc le rapport précédent devient

$$\frac{\frac{1}{2}\,\text{SE} \times \text{SF} \times \sin \text{ESF}}{\text{ES} \times \text{SF} \times \cos \text{SEN} \times \cos \text{SFO}}$$

ou

$$\frac{\frac{1}{2}\sin \text{ESF}}{\cos \text{SEN} \times \cos \text{SFO}}.$$

Il suffit de prouver que ce rapport est constant, ce qui est évident, car les angles ESF, SEN, SFO sont constants.

Note. MM. Clery, Saintard, de Courcel, Dorlodot, Renaud, élèves du lycée Saint-Louis, Poupelet, institution Reuss, ont donné la même démonstration.