NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. PROUHET

Solution et généralisation de la question 365 (Sylvester)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 184-187

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__184_1>

SOLUTION ET GÉNÉRALISATION DE LA QUESTION 365 (SYLVESTER)

(voir t. XVI, p. 125) ;

PAR M. E. PROUHET.

Le théorème de M. Sylvester est un cas particulier du suivant :

Si a *et* b *sont deux nombres entiers,* b *étant moindre* *que* a *ou au plus égal à* a, *la partie entière de*

$$\left(a + \sqrt{a^2 + 2b}\right)^{2m+1}$$

est divisible par 2^{m+1}.

Je pose, pour abréger,

$$R = a + \sqrt{a^2 + 2b}$$

et

$$R^n = A_n + B_n \sqrt{a^2 + 2b},$$

en sorte qu'on aura

$$A_1 = a, \quad B_1 = 1.$$

La partie entière de R étant $2a$, on voit que le théorème est vrai pour $m = 0$. Sa vérité, dans tous les cas, résulte des théorèmes suivants :

THÉORÈME I. *Si* A_{2m+1} *et* B_{2m+1} *sont divisibles par* 2^k, A_{2m+3} *et* B_{2m+3} *seront divisibles par* 2^{k+1}.

En effet, on a

$$R^{2m+1}.R^2 = R^{2m+3}$$

$$= \left(A_{2m+1} + B_{2m+1}\sqrt{a^2 + 2b}\right)\left(2a^2 + 2b + 2a\sqrt{a^2 + 2b}\right),$$

d'où l'on déduit

$$A_{2m+3} = (2a^2 + 2b)A_{2m+1} + 2a(a^2 + 2b)B_{2m+1},$$
$$B_{2m+3} = 2a\,A_{2m+1} + (2a^2 + 2b)B_{2m+1},$$

égalités qui rendent la conclusion évidente.

Corollaire. A_1 et B_1 sont divisibles par 2 : donc A_{2m+1} *et* B_{2m+1} *sont divisibles par* 2^m.

THÉORÈME II. *La partie entière de* R^{2m+1} *est* $2A_{2m+1}$.

En effet, R étant racine de l'équation

$$(1) \qquad x^2 - 2ax - 2b = 0,$$

R^{2m+1} sera racine de l'équation

$$(2) \qquad x^2 - 2A_{2m+1}x - 2^{2m+1}b^{2m+1} = 0,$$

car la somme des $(2m+1)^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation (1) est $2A_{2m+1}$, et le produit de ces puissances est $-(2b)^{2m+1}$.

En résolvant l'équation (2), on aura

$$R^{2m+1} = A_{2m+1} + \sqrt{A_{2m+1}^2 + 2^{2m+1}b^{2m+1}}.$$

Il faut donc démontrer que l'on a en général

$$2^{2m+1}b^{2m+1} \leqq 2A_{2m+1}.$$

Cette inégalité est déjà vérifiée pour $m = 0$, et nous allons faire voir que si elle a lieu jusqu'à un certain nombre m, elle aura encore lieu pour $m+1$.

En effet, on a

$$R^{2m+3}$$

$$= \left(A_{2m+1} + \sqrt{A_{2m+1}^2 + 2^{2m+1}b^{2m+1}}\right)\left(2a^2 + 2b + 2a\sqrt{a^2+2b}\right),$$

d'où l'on déduit

$$A_{2m+3} = (2a^2+2b)A_{2m+1} + 2a\sqrt{A_{2m+1}^2 + 2^{2m+1}b^{2m+1}}\sqrt{a^2+2b},$$

valeur rationnelle malgré sa forme, car

$$\sqrt{A_{2m+1}^2 + 2^{2m+1}b^{2m+1}} = B_{2m+1}\sqrt{a^2+2b}:$$

il en résulte

$$A_{2m+3} > (2a^2+2b)A_{2m+1} + 2a^2A_{2m+1}$$
$$> (2a^2+b)\,2A_{2m+1}.$$

Cette inégalité ne sera pas troublée si l'on remplace dans le second membre $2A_{2m+1}$ par $2^{2m+1}b^{2m+1}$, quantité qui est plus petite par hypothèse, et $2a^2+b$ par $2b^2$. On aura donc

$$A_{2m+3} > 2^{2m+2}b^{2m+3},$$

ou

$$2A_{2m+3} > 2^{2m+3}b^{2m+3}.$$

C. Q. F. D.

Corollaire. A_{2m+1} étant divisible par 2^m (corollaire du théorème I^er^), il en résulte que $2A_{2m+1}$ est divisible par

2^{m+1}. Donc la partie entière de R_{2m+1} est divisible par 2^{m+1}, ce qui est le théorème de M. Sylvester généralisé.

On peut compléter l'énoncé du théorème en ajoutant que la valeur entière la plus approchée *par excès* de R^{2m} est divisible par 2^m.