

L. BOURDELLES

Solutions des questions 353 et 354

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16 (1857), p. 173-176

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__173_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DES QUESTIONS 353 ET 354

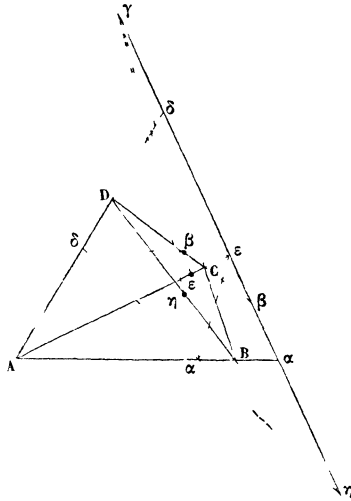
(voir t. XV, p. 464);

PAR M. L. BOURDELLES,

Élève au lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Question 353.

Soit ABCD un quadrilatère coupé par une transversale en α sur le côté AB et en β sur le côté opposé CD; soient α' le conjugué harmonique de α par rapport aux points A, B, et β' le conjugué harmonique de β par rapport aux points C, D; menons la droite $\alpha'\beta'$, faisons une construction analogue sur les côtés opposés AC, BD et sur les diagonales AC, BD : les trois droites passent par le même point. (DE LAFFITTE.)



Je désigne le point d'intersection de la sécante avec

BC	par γ_1	et par γ'	son conjugué	
AD	— δ_1	— ρ'	—	
AC	— ε_1	— ε'	—	
BD	— η_1	— η'	—	

Les droites $DB, \delta\alpha$ se coupent en un point η ; je le joins aux points α' et δ' ainsi qu'au point A. Les deux droites $\eta\delta', \eta\alpha'$, étant conjuguées de la droite $\delta\alpha$ par rapport aux mêmes droites $DB, A\eta$, doivent se confondre, c'est-à-dire que la ligne $\delta'\alpha'$ passe par le point η . On verrait de la même manière que la droite $\beta'\gamma'$ passe aussi par le point η .

Un raisonnement semblable montrerait que les droites $\alpha'\gamma', \delta'\beta'$ passent par le point ε et que les droites $\eta'\beta', \alpha'\varepsilon'$ passent par le point γ .

Or dans le quadrilatère $\alpha'\gamma'\beta'\delta'$ les diagonales $\alpha'\beta', \delta'\gamma'$ se coupent en un même point O, pôle de $\eta\varepsilon$. De même

dans le quadrilatère $\alpha'\epsilon'\beta'\eta'$ les diagonales $\alpha\beta'$, $\eta'\epsilon'$ se coupent en un même point situé comme le point O sur $\alpha'\beta'$ qui est une diagonale commune à ces deux quadrilatères. Ce point d'intersection est le pôle de la droite $\eta\gamma$. Mais ces deux droites $\eta\gamma$, $\eta\epsilon$ coïncident : donc le point d'intersection des droites $\alpha'\beta'$, $\eta'\epsilon'$ est le même que celui des droites $\alpha'\beta'$, $\delta'\gamma'$, ce qui démontre le théorème.

« On pourrait simplifier la démonstration en remarquer que deux côtés quelconques de l'hexagone formé par les six points α , β , γ , δ , ϵ , η sont divisés homographiquement par les quatre autres ; il en résulte que les diagonales qui joignent les sommets opposés passent par un même point. » (*Géométrie supérieure*, n° 414.)

Remarques. Les six points α' , β' , γ' , δ' , ϵ' , η' sont toujours sur une même conique, car les côtés opposés de l'hexagone dont ces six points sont les sommets, se coupent sur une même droite qui est la sécante.

Si la sécante s'éloigne à l'infini, on retrouve ce théorème :

La ligne qui joint les milieux des diagonales d'un quadrilatère et les lignes qui joignent les milieux des côtés opposés se coupent en un même point.

Ce point divise chacune d'elles en deux parties égales.

On aurait pu déduire aussi ce théorème du théorème proposé en faisant la perspective de la figure de manière à envoyer la sécante à l'infini, en employant le procédé décrit par M. Poncelet. (*Propriétés projectives*, page 54.)

Question 354.

On déduit ce théorème de la proposition 353 par les polaires réciproques. Les deux théorèmes sont corrélatifs (voir p. 24).

Remarque. Si l'on suppose que le point s'éloigne à l'infini sur une droite quelconque, on trouve ce théorème :

Si dans un quadrilatère on mène une transversale quelconque et qu'on joigne le sommet A au milieu du segment intercepté sur la sécante par les côtés AB, AD aboutissant à ce sommet ; si l'on fait la même construction par rapport au sommet opposé B, les deux droites ainsi obtenues se coupent en un certain point. En opérant de même par rapport aux sommets B et C ainsi que par rapport aux points de concours des côtés opposés, les trois points d'intersection sont en ligne droite.

On peut également déduire ce théorème en faisant la perspective de la figure sur laquelle est fondée la question 354.

Note. M. Richard Oxamendi adresse une solution aussi fondée sur des considérations segmentaires.