NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. ROCHETTE

Solution de la question 349

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 172-173

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__172_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 349

(voir t. XV, p. 407);

PAR LE P. H. ROCHETTE,

Si une équation du troisième degré et sa dérivée ont toutes leurs racines rationnelles, les racines a, b, c de la première seront données par les formules

$$a = m + h, \quad b = mu^2 + h, \quad c = 2mu + h,$$

m, h et u étant des nombres rationnels. (PROUHET.)

Soient donc a, b, c les trois racines de l'équation donnée

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les racines de la dérivée soient rationnelles est exprimée par la relation

$$P^2 - 3Q = C^2.$$

Si nous y remplaçons P et Q par leurs valeurs en fonction des racines, elle prendra la forme suivante :

$$(a - b)^2 + (a - c)(b - c) = C^2,$$

et cette relation entre les trois racines a, b, c suffit pour qu'on puisse les mettre sous la forme indiquée.

En effet, si nous éliminons m et h entre les trois équations

$$a = m + h, \quad b = mu^2 + h, \quad c = 2mu + h,$$

nous obtiendrons une équation du second degré en u

$$(a - c)u^2 - 2(a - b)u - (b - c) = 0,$$

qui donnera pour u des valeurs rationnelles toutes les fois que

$$(a - b)^2 + (a - c)(b - c)$$

sera un carré parfait. On pourra donc, dans ce cas-là, trouver aussi pour m et h des valeurs rationnelles, et exprimer les trois nombres rationnels a, b, c au moyen des fonctions indiquées de m, h et u.

Le problème a deux solutions dans le cas où $P^2 - 3Q$ n'est pas nul, et une seule dans le cas contraire.

On démontrerait très-facilement que réciproquement lorsque les trois racines a, b, c d'une équation du troisième degré sont données par les formules

$$a = m + h, \quad b = mu^2 + h, \quad c = 2mu + h,$$

les racines de la dérivée sont rationnelles.