E. PROUHET

Solution et généralisation de la question 232

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 166-171

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__166_1>

SOLUTION ET GÉNÉRALISATION DE LA QUESTION 232

(voir t. X, p. 182);

PAR M. E. PROUHET.

La question 232 a déjà été résolue d'une manière très-remarquable par M. Tardy (t. XI, p. 345). Pour me conformer au désir exprimé par ce savant professeur (t. XI, p. 354), je vais donner ma propre solution avec les simplifications qui résultent d'un point de vue un peu plus général auquel j'ai été amené par de nouvelles réflexions.

1. Soient A_1, A_2,..., A_n, n points distribués comme on voudra dans un plan, et concevons ces points liés par des droites, savoir le point A_1 au point A_2, celui-ci au point A_3, etc., et enfin le point A_n au point A_1. Nous obtiendrons un polygone rentrant, d'une forme d'ailleurs quelconque.

Je désignerai par P_1 l'aire de ce polygone; par P_2 l'aire du polygone obtenu en joignant les milieux des côtés consécutifs du premier, etc.

2. Prenons maintenant des axes rectangulaires, et désignons par x_1, y_1, x_2, y_2, etc., les coordonnées des points A_1, A_2, etc.

Posons en outre

$$[\alpha, \beta] = x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha,$$

$$\Sigma_\alpha = [1, \alpha + 1] + [2, \alpha + 2] + \ldots + [n, \alpha].$$

Ces fonctions jouissent de propriétés qu'il suffit d'indiquer, parce qu'elles sont bien connues ou d'une démonstration facile. Ainsi l'on a

$$[\alpha, \beta] = -[\beta, \alpha],$$

$$[\alpha, \alpha] = 0,$$

$$\Sigma_{n-\alpha} = -\Sigma_\alpha,$$

$$\Sigma_\omega = 0 \quad \text{si} \quad n = 2\omega,$$

$$\Sigma_\omega = -\Sigma_{\omega-1} \quad \text{si} \quad n = 2\omega - 1.$$

Enfin les coordonnées ζ et η d'un sommet de P_k sont donnés par les formules symboliques

$$\xi = \frac{1}{2^{k-1}}(1+x)^{k-1}x^{\alpha},$$

$$\eta = \frac{1}{2^{k-1}}(1+y)^{k-1}y^{\alpha},$$

dans lesquelles, après le développement du second membre, il faut remplacer les exposants par des indices.

3. Ces préliminaires admis, il est facile de démontrer le théorème suivant :

Il existe une relation, indépendante du mode de distribution des points A_1, A_2,..., A_n, *entre* P_1, P_2, P_3,... *et* P_ω, ω *désignant* $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$ *selon que* n *est pair ou impair.*

En effet, on a d'abord pour l'aire du premier polygone (*voir* t. XV, p. 373)

$$P_1 = \frac{1}{2}\Sigma_1 = A_1\Sigma_1.$$

Pour obtenir P_2, il suffira de changer dans cette formule x_1, y_1, x_2, y_2, etc., en $\frac{x_1+x_2}{2}$, $\frac{y_1+y_2}{2}$, etc., en en sorte que P_2 sera une somme d'expressions telles que les suivantes

$$\frac{1}{2}\,\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{y_2+y_3}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{y+y_2}{2}\cdot\frac{x_2+x_3}{2},$$

dont le développement ne fournira que des termes de la forme $a[1, 2]$ ou $b[1, 3]$. On pourra donc écrire

$$P_2 = B_1\Sigma_1 + B_2\Sigma_2,$$

B_1, B_2 étant des coefficients numériques indépendants des coordonnées.

4. En continuant de cette manière, on aura les égalités suivantes :

$$(1) \qquad P_1 = A_1 \Sigma_1,$$

$$(2) \qquad P_2 = B_1 \Sigma_1 + B_2 \Sigma_2,$$

$$(3) \qquad P_3 = C_1 \Sigma_1 + C_2 \Sigma_2 + C_3 \Sigma_3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(\omega) \qquad P_\omega = L_1 \Sigma_1 + L_2 \Sigma_2 + L_3 \Sigma_3 + \dots + L_\omega \Sigma_\omega,$$

auxquelles il faudra joindre, suivant les cas,

$$(\omega + 1) \qquad \Sigma_\omega = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma\omega = -\Sigma_{\omega-1} \ (*).$$

5. La loi des coefficients qui entrent dans ces équations est assez compliquée, mais il suffit, pour notre objet, de remarquer que ceux que nous désignons par A_1, B_2, $C_3, \dots, L_\omega$ ne sont pas nuls. On trouve en effet

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, \quad C_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}, \quad D_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}, \dots$$

Il résulte de cette remarque qu'on pourra toujours éliminer entre ces $\omega + 1$ équations les quantités $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_\omega$ qui sont au nombre de ω. Le résultat de cette élimination sera la relation entre $P_1, P_2, \dots, P_\omega$ dont l'existence était à démontrer.

Cette relation sera d'ailleurs linéaire et de la forme

$$(\text{R}) \qquad P_1 + A_2 P_2 + A_3 P_3 + \dots + A_\omega P_\omega = 0.$$

(*) $\frac{1}{2}\Sigma_2, \frac{1}{2}\Sigma_3$, etc., expriment les surfaces des polygones obtenus en joignant de deux en deux, de trois en trois, les sommets de P_1. Par exemple l'égalité (2), dans laquelle $B_1 = \frac{1}{4}$, $B_2 = \frac{1}{8}$, peut s'écrire ainsi

$$P_2 = \frac{P_1}{2} + \frac{Q}{4},$$

Q désignant l'aire du polygone obtenu en joignant de deux en deux les sommets de P_1.

6. Pour trouver les coefficients A_2, A_3,..., A_ω, soit k un entier au plus égal à n, et désignons par $\frac{k'}{n'}$ la fraction irréductible équivalente à $\frac{k}{n}$. Prenons pour P_1 un polygone régulier étoilé de n' côtés et dont l'angle au centre est égal à $\frac{2k'\pi}{n'}$. Ce polygone pourra être assimilé à un polygone de n côtés, en considérant son périmètre comme un fil non interrompu qui se serait enroulé h fois autour de ses sommets, h représentant le quotient $\frac{n}{n'}$.

P_1 étant régulier, il en sera de même de P_2, P_3, etc. Chacun de ces polygones est composé de n triangles ayant le centre du polygone pour sommet commun.

Or la comparaison des triangles élémentaires de P_1 et de P_2 donne aisément

$$P_2 = P_1 \cos^2 \frac{k'\pi}{n'} = P_1 \cos^2 \frac{k\pi}{n}:$$

on trouvera de même

$$P_3 = P_2 \cos^2 \frac{k\pi}{n} = P_1 \cos^4 \frac{k\pi}{n},$$

$$P_4 = P_3 \cos^2 \frac{k\pi}{n} = P_1 \cos^6 \frac{k\pi}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_\omega = P_{\omega-1} \cos^2 \frac{k\pi}{n} = P_1 \cos^{2(\omega-1)} \frac{k\pi}{n}.$$

La substitution de ces valeurs dans la relation (R), après qu'on aura supprimé le facteur commun P_1 et remplacé $\cos^2 \frac{k\pi}{n}$ par x, donnera

$$\text{(E)} \qquad 1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots + A_\omega x^{\omega-1} = 0.$$

k étant l'un quelconque des nombres 1, 2, 3,..., $\omega - 1$, il en résulte que l'équation (E) admet pour racines

$$\cos^2\frac{\pi}{n},\quad \cos^2\frac{2\pi}{n},\quad \cos^2\frac{3\pi}{n},\ldots,\quad \cos^2\frac{(\omega-1)\pi}{n}.$$

Or on trouve une équation qui admet ces mêmes racines lorsque l'on égale à zéro le développement de $\sin na$ en fonction de $\cos a$, après y avoir remplacé $\cos a$ par x. Cette équation est la suivante :

$$(\mathcal{E})\qquad 1+\mathcal{A}_2 x+\mathcal{A}_3 x^2+\ldots+\mathcal{A}_\omega x^{\omega-1}=0,$$

$\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3,\ldots, \mathcal{A}_\omega$ étant des fonctions de n comprises dans l'un des types

$$\frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots[n^2-(2p-2)^2]}{2.3\ldots(2p-1)}$$

ou

$$\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots[n^2-(2p-3)^2]}{1.2.3\ldots(2p-2)},$$

suivant que n est pair ou impair.

Les équations (E) et ($\mathcal{E}$) ont donc les mêmes racines et doivent être identiques. Par conséquent, on aura

$$A_2=\mathcal{A}_2,\quad A_3=\mathcal{A}_3,\ldots.$$

7. Ainsi les deux égalités qui constituent la question 232 se trouvent démontrées et de plus généralisées, de telle sorte qu'elles expriment une propriété qui appartient à n points distribués comme on voudra dans un plan, propriété qui ne dépend que du *nombre* de ces points.