NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ARTHUR CAYLEY

Note sur un problème d'analyse indéterminée

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 161-166

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__161_0>

NOTE
Sur un problème d'analyse indéterminée;

PAR M. ARTHUR CAYLEY.

Euler a donné dans le Mémoire : *Regula facilis problemata Diophantea per numeros integros expedite solvendi* (*Comment. Arith. Coll.*, t. II, p. 263) la solution que voici de l'équation indéterminée

$$(1) \qquad \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \zeta y^2 + \eta y + \vartheta.$$

En supposant que l'on ait la solution $x = a$, $y = b$ de manière que

$$\alpha a^2 + \beta a + \gamma = \zeta b^2 + \eta b + \vartheta,$$

et en posant

$$s = \sqrt{\alpha r^2 + 1},$$

où r est une quantité quelconque, l'équation sera satisfaite par les valeurs

$$x = sa + \zeta rb + \frac{(s-1)\beta}{2\alpha} + \frac{1}{2} r\eta,$$

$$y = \alpha ra + sb + \frac{(s-1)\eta}{2\zeta} + \frac{1}{2} r\beta;$$

en effet, on voit sans peine que ces valeurs donnent identiquement

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \alpha x^2 + \beta x + \gamma - (\zeta y^2 + \eta y + \vartheta) \\ & = \alpha a^2 + \beta a + \gamma - (\zeta b^2 + \eta b + \vartheta) = 0. \end{aligned} \right.$$

En supposant de plus que les coefficients α, β, γ, ζ, η, ϑ soient des nombres entiers tels, que $\alpha\zeta$ soit un entier positif non carré, on peut toujours déterminer le nombre entier r de manière que s soit un nombre entier; cela étant, et en supposant que a, b soient des entiers, il est évident que x, y seront des nombres rationnels. Euler a de plus remarqué que l'on peut toujours faire en sorte que x, y soient des nombres entiers. En effet, si les formules donnent $x = a'$, $y = b'$ des valeurs non entières, en substituant dans les formules au lieu de a, b les valeurs a', b', on obtiendra pour x, y des valeurs entières; cela se vérifie sans peine.

L'équation indéterminée (2) rentre dans celle-ci

$$(3)\quad (a, b, c, f, g, h)(x', y', z')^2 = (a, b, c\, f, g, h)(x, y, z)^2,$$

(*Voir* note I.)

en supposant que la forme ternaire

$$(a, b, c, f, g, h)(x, y, z)^2$$

se transforme en elle-même au moyen d'une substitution linéaire quelconque. On peut supposer que cette substitution soit telle, que l'on ait $z' = z$; cela étant, en écrivant $z' = z = 1$ et en mettant de plus $h = 0$, l'équation (3) se réduit évidemment à une forme telle que l'équation (2). Or on peut trouver par la méthode générale de M. Hermite la solution convenable de l'équation (3). En supposant, comme à l'ordinaire,

$$\mathfrak{A} = bc - f^2 \ldots, \quad \mathfrak{F} = gh - af \ldots,$$
$$k = abc - af^2 - bg^2 - ch^2 + 2fgh,$$

(*Voir* note II.)

il faut pour cela écrire

$$x' = 2\xi - x,$$
$$y' = 2\eta - y,$$
$$z' = 2\zeta - z,$$

et

$$
\begin{aligned}
ax + hy + gz &= a\xi + h\eta + g\zeta - q\,\mathfrak{C}\eta + q\,\mathfrak{F}\zeta,\\
hx + bx + fz &= h\xi + b\eta + f\zeta + q\,\mathfrak{C}\xi - q\,\mathfrak{G}\zeta,\\
gx + fy + cz &= g\xi + f\eta + c\zeta - q\,\mathfrak{F}\xi + q\,\mathfrak{G}\eta,
\end{aligned}
$$

où q est une quantité arbitraire. En effet, en multipliant ces équations par ξ, η, ζ et en ajoutant, on obtient

$$
\begin{aligned}
&(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h)(\xi,\ \eta,\ \zeta)(x,\ y,\ z)\\
&= (a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h)(\xi,\ \eta,\ \zeta)^2 \text{ (note III)},
\end{aligned}
$$

et, au moyen de cette équation et des valeurs

$$
\begin{aligned}
x' &= 2\xi - x,\\
y' &= 2\eta - y,\\
z' &= 2\zeta - z,
\end{aligned}
$$

on forme tout de suite l'équation (3) (note IV). De plus, en multipliant les trois équations par $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ et en ajoutant, on obtient

$$kz = k\zeta \text{ (note V)},$$

c'est-à-dire

$$z = \zeta$$

et de là

$$z' = z.$$

Cela étant, les deux équations donnent, en remplaçant ζ par z,

$$
\begin{aligned}
a\xi + (h - q\,\mathfrak{C})\eta &= ax + hy + (g - q\,\mathfrak{F})z,\\
(h + q\,\mathfrak{C})\xi + b\eta &= hx + by + (f + q\,\mathfrak{G})z,
\end{aligned}
$$

et de là, en remarquant que

$$ab - (h - q\mathfrak{C})(h + q\mathfrak{C}) = \mathfrak{C} + q^2\mathfrak{C}^2 = \mathfrak{C}(1 + q^2\mathfrak{C}),$$

on obtient très-facilement, éliminant successivement η

et ξ,

$$(1 + q^2\mathfrak{C})\,\xi = (1 + qh)\,x + qby + (qf + q^2\mathfrak{G})\,z,$$
$$(1 + q^2\mathfrak{C})\,\eta = -\,qax + (1 - qh)\,y + (-\,qg + q^2\mathfrak{F})\,z$$

et ensuite

$$\begin{aligned}&(1 + q^2\mathfrak{C})\,x'\\ &= (1 + 2qh - q^2\mathfrak{G})\,x + 2qby + 2\,(qf + q^2\mathfrak{G})\,z,\\ &(1 + q^2\mathfrak{C})\,y'\\ &= -\,2qax + (1 - 2qh - q^2\mathfrak{C})\,y + 2\,(-\,qg + q^2\mathfrak{F})\,z,\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en écrivant $z = z' = 1$, les valeurs

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}&(1 + q^2\mathfrak{C})\,x'\\ &= (1 + 2qh - q^2\mathfrak{C})\,x + 2qby + 2\,(qf + q^2\mathfrak{G}),\\ &(1 + q^2\mathfrak{C})\,y'\\ &= -\,2qax + (1 - 2qh - q^2\mathfrak{C})\,y + 2\,(-\,qg + q^2\mathfrak{F}),\end{aligned}\right.$$

satisfont identiquement à l'équation

$$(5)\quad (a, b, c, f, g, h)\,(x', y', 1)^2 = (a, b, c, f, g, h)\,(x, y, 1)^2.$$

En prenant $h = 0$, on a

$$\mathfrak{C} = ab,\quad \mathfrak{F} = -\,af,\quad \mathfrak{G} = -\,bg,$$

et les formules deviennent

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}&(1 + q^2 ab)\,x' = (1 - q^2 ab)\,x + 2qby + 2q\,(f - qbg),\\ &(1 + q^2 ab)\,y' = -\,2qax + (1 - q^2 ab)\,y - 2q(g + qaf),\end{aligned}\right.$$

valeurs qui satisfont identiquement à l'équation (note VI)

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}&(ax'^2 + 2gx' + l') + (by'^2 + 2fy' + m')\\ &= (ax^2 + 2gx + l) + (by^2 + 2fy + m),\end{aligned}\right.$$

et en y écrivant

$$\frac{1 - q^2 ab}{1 + q^2 ab} = s = \sqrt{1 - abr^2},$$

on obtient des formules qui correspondent précisément aux équations données par Euler pour x, y en termes de a, b.

Londres, 10 mars 1857.

NOTES DU RÉDACTEUR.

Note I. D'après la commode notation introduite par M. Cayley, l'équation (3) développée a cette forme

$$\begin{aligned} &ax'^2 + by'^2 + c'z'^2 + 2fy'z' + 2gx'z' + 2hx'y' \\ &= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy. \end{aligned}$$

Note II. Désignant par k le déterminant de chaque membre de l'équation (3), on a

$$k = abc - af^2 - bg^2 - ch^2 + 2fgh;$$

prenant les dérivées de k successivement par rapport à chacune des six lettres a, b, c, f, g, h, on a

$$\mathfrak{A} = bc - f^2, \quad \mathfrak{B} = ac - g^2, \quad \mathfrak{C} = ab - h^2,$$

$$\mathfrak{F} = +\frac{1}{2}\frac{dk}{df} = gh - af, \quad \mathfrak{G} = fh - bg, \quad \mathfrak{H} = fg - ch.$$

Note III. Cette notation développée donne

$$\begin{aligned} &x(a\xi + h\eta + g\zeta) + y(h\xi + b\eta + f\zeta) + z(g\xi + f\eta + c\zeta) \\ &= a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + 2f\eta\zeta + 2g\xi\zeta + 2h\zeta\eta. \end{aligned}$$

Note IV. Remplaçant dans la dernière équation respectivement x, y, z par $2\xi - x'$, $2\eta - y'$, $2\zeta - z'$, on obtient

$$\begin{aligned} &x'(a\xi + h\eta + g\zeta) + y'(h\xi + b\eta + f\zeta) + z'(g\xi + f\eta + c\zeta) \\ &= a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + 2f\eta\zeta + 2g\xi\zeta + 2h\xi\eta. \end{aligned}$$

Note V. Exécutant les opérations indiquées, on trouve

$$x(a\mathfrak{G} + h\mathfrak{F} + g\mathfrak{C}) + y(h\mathfrak{G} + b\mathfrak{F} + f\mathfrak{C}) \\ + z(g\mathfrak{G} + f\mathfrak{F} + c\mathfrak{C}) \\ = \xi(a\mathfrak{G} + h\mathfrak{F} + g\mathfrak{C}) + \eta(h\mathfrak{G} + b\mathfrak{F} + f\mathfrak{C}) \\ + \zeta(g\mathfrak{G} + f\mathfrak{F} + c\mathfrak{C}) - q:$$

or

$$g\mathfrak{G} + f\mathfrak{F} + c\mathfrak{C} = k;$$

donc

$$kz = k\zeta, \quad z = \zeta, \quad z = z\zeta - z' = 2z - z',$$

donc

$$z = z'.$$

Note VI. Faisant

$$z = z' = 1, \quad h = 0,$$

l'équation (3) prend la forme

$$ax'^2 + 2gx' + by'^2 + 2fy' + c' \\ = ax^2 + 2gx + by^2 + 2fy + c.$$

Faisant

$$c = q' = l + m,$$

on obtient

$$(ax'^2 + 2gx' + l') + (by'^2 + 2fy' + m') \\ = (ax^2 + 2gx + l) + (by^2 + 2fy + m).$$